

اهداءات ٢٠٠٢

أسرة د/ عبد الرحمن بدوي

د/ عبد الرحمن بدوي للإبداع الثقافي

كتاب

حسابي التفاضل والتكامل تأليف حضرة

أحمد أفندي كمال مدرس فرع

المحبريات بمدرسة

المهندسخانة

الهندية

قد قرأ مجلس المعارف الاعلا بمجلسه المنعقدة في يوم الثلاثاء المبارك الموافق ٤ أكتوبر
سنة ١٢٨١ هـ افرنيكية الموافق ١٠ ذي القعدة ١٢٩٨ هـ هجرية لزوم طبع
هذا الكتاب واستعماله لتلامذة مدرسة الهندسة خانة الهندية

(الجزء الاول)

في حساب التفاضل

الطبعة الاولى

(بمطبعة ديوان عموم المعارف بسراي درب الجمائز)

(على صاحبها افضل الصلاة وازكى التحية)

لا يجوز طبع هذا الكتاب بدون اذن مؤلفه ومن تجارى على ذلك يحاكم حسب القوانين



بسم الله الرحمن الرحيم

(مقدمة)

(في اثبات نظرية كثيرة الاستعمال)

يُقال ان أى كمية مثل k متوسطة بين عدة كميات متى كانت هذه الكمية محصورة بين أصغر هذه الكميات وأكبرها أى متى كان الفرقان

$$k - k_1 \text{ و } k - k_n$$

مُعَدَّين في الإشارة وحرفاً k و k_1 و k_n أحدهما لا كبر الكميات المعلومة وآخرهما لأصغرها

وللدلالة على الكمية المتوسطة بين جملة كميات معلومة رموز لها بحروف k_1, k_2, \dots, k_n الخ يكتب هكذا

$$(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

نظرية — اذا رمزنا بحروف k_1, k_2, \dots, k_n الخ لكميات مكيفة الاشارات وبحروف k_1, k_2, \dots, k_n الخ لكميات اشاراتها متحدة وعددها كعددها اقول ان

$$(1) \quad \left(\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}, \dots, \frac{k_{n-1}}{k_n} \right) = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{k_2 + k_3 + \dots + k_n}$$

لاننا اذا فرضنا ان k اكبر النسب $\frac{k_1}{k_2}, \frac{k_2}{k_3}, \dots, \frac{k_{n-1}}{k_n}$ وأن k_1 أصغرها تكون الفروق

(2)

$$\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$$

متحدة الإشارة فإذا ضربنا أحد ود كل من هذين التتابعين في v و v و v ... على التناظر توجد كذلك هذه الكميات المتحدة الإشارة وهي

$$\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$$

فإذا جمعنا أحد ود كل يتابع على بعضها وقسمنا كلا من حاصل الجمع على $v + v + v + \dots$ يشاهد أن الخارجين

$$\frac{v}{v + v + v + \dots} - \frac{v}{v + v + v + \dots}, \dots, \frac{v}{v + v + v + \dots} - \frac{v}{v + v + v + \dots}$$

يكونان متعدين في الإشارة أيضا وبذا تنضح صحة النظرية

تتبعتان - الأولى إذا فرضنا أن $v = \dots = \frac{v}{5} = \frac{v}{5}$ ورمزنا بحرف v لعدد الكميات $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$ يكون

$$\frac{v}{v + v + v + \dots} - \frac{v}{v + v + v + \dots} = \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$$

الثانية إذا أخذنا القانون (1) وعوضت فيه الحروف $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$ بالحواصل $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$ على التناظر (وهذا ممكن) فإنه يستخرج منه هذا القانون وهو

$$\frac{v}{v + v + v + \dots} - \frac{v}{v + v + v + \dots} = \dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$$

وحينئذ يكون مجموع حواصل الضرب $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$ مساويا لمجموع العوامل المتحدة الإشارة وهي $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$ مضروبة في كمية متوسطة بين العوامل الأخرى وهي $\dots, \frac{v}{5} - \frac{v}{5}, \dots$

(في المتغيرات والثوابت)

بسم المتغير وكل كمية تأخذ على التعاقب مقادير مختلفة في مسألة واحدة والثابت هو كل كمية تحفظ مقدار واحد أو أطول المسئلة المشتغل بها

بسم متى تعلقت مقادير متغير بالمقادير التي يأخذها متغير آخر على حسب قانون ما يقال للمتغير الأول دالة للمتغير الثاني ويتحقق من أن الكميتين اللتين تتغيران معاً تكونان دالتين لبعضهما متى علم أنه ينتج بكل مقدار يعطى لاحداهما مقدار معين للآخرى ولولم يعلم الارتباط الواقع بينهما ما ولا يمكن بيانه بقانون جبري

(٤)

بمقدار يسمى متغيرا غير متعلق كل متغير بمقادير اختيارية
والمتغير الذي يتعين مقداره متى أعطى مقدارا للمتغير الغير المتعلق يكون دائما دالة لهذا
المتغير الغير المتعلق

مثلا مساحة الدائرة دالة لنصف قطرها و زمن الذبذبات الصغيرة للبندول البسيط دالة
لطوله

ويمكن ان يكون المتغير دالة لعدة متغيرات غير متعلقة مثلا حجم الاسطوانة القائمة التي
قاعدتها دائرة دالة لارتفاعها ولنصف قطر قاعدتها

وعادة يرمز للمتغيرات بالحروف الابطحدية و و ح و س و ص و ع و ف و ز و س و للثوابت
بالحروف الابطحدية الاخر

وللدلالة على جلة دوال المتغير واحد مثل س بدون بيان الارتباطات الواقعة بين الدوال
والمتغير تستعمل الرموز

$$s, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

أو تستعمل الرموز

$$s, s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

ومتى أعطى للمتغير س مقدار مخصوص وليكن > يستدل على العدد الناتج من
تعويض س في الدالة > (س) مثلا بالعدد > بالرمز > (>)

وكذا يستدل على الدوال ذات العدة متغيرات س و ص و ع و ف و ز و س بالرموز
> (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س)

و ... الخ أو بالرموز

> (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س) و > (س و ص و ع و ف و ز و س)

ويستدل على الناتج الذي يقصل عليه بتعويض المتغيرات س و ص و ع و ف و ز و س في الدالة
> (س و ص و ع و ف و ز و س) مثلا بالكميات المعروفة ك ل و م بالرمز > (ك ل و م)

يستدل كل دالة ذات متغير واحد غير متعلق يمكن بيانها بياناً هندسياً
لأنه يمكن لاجل ذلك ان يعتبر المتغير الغير المتعلق س افقياً والدالة ص رأسياً للمختن
المستوى المدلول عليه بالمعادلة

$$s = s_1$$

وعادة

(٥)

وعادة يكون هذا المتخني مستقرا أعني انه متى أعطيت للتغير منه مقادير مختلفة عن بعضها اختلافات تكاد ان تكون غير محسوسة تكون مقادير الراسي منه مختلفة عن بعضها اختلافات تكاد ان تكون غير محسوسة أيضا وفي هذه الحالة يكون التغير منه دالة مستقرة للتغير منه

ويمكن كذلك بيان الدالة ذات المتغيرين الغير المتعلقين بسطح واما الدوال التي يزيد عددهم تغيراتها الغير المتعلقة عن اثنين فلا يمكن بيانها بما ناهنديا
بسم الله أقسام الدالة — تنقسم الدالة الى محولة وغير محولة فالدالة المحولة ما كانت مرتبطة بتغيرها بواسطة معادلة محولة بالنسبة لهذه الدالة وذلك مثل منه في المعادلتين

$$\text{صه} = 3\text{سه} - 4\text{و} \quad \text{و} \quad \text{صه} = \text{لوجاهه}$$

والدالة الغير المحولة ما كانت مرتبطة بتغيرها بواسطة معادلة غير محولة بالنسبة لهذه الدالة وذلك مثل منه في المعادلتين

$$\text{سه} + \text{صه} - 3\text{وه} = 0 \quad \text{و} \quad \text{صه لوجهه} + \text{سه لوجهه} = 7$$

والدوال المحولة اما ان تكون جبرية أو عالية فالجبرية ما كانت العمليات التي تجري على المتغير هي فقط عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع الى قوى ذات أس ثابت أى غير متعلق بالمتغير واستخراج الجذور وذلك كالدالة منه في المعادلة

$$\text{صه} = \frac{\text{سه}^3 + \text{وه} - \frac{1}{2}\text{سه}^2 - \frac{1}{3}\text{وه}^2}{4(\text{سه} + \text{وه})}$$

والعالية ما لا يمكن أن يستدل عليها بالمتغير الغير المتعلق بواسطة العمليات الستة المذكورة وذلك مثل

$$\text{سه} \quad \text{و} \quad \text{لوجهه} \quad \text{و} \quad \text{ظاهه}$$

ويقال للدالة الجبرية جذرية متى لم تشمل على المتغير تحت علامة جذر ولا تحت أس كسرى مثل منه في المعادلة

$$\text{صه} = \frac{4}{3}\text{سه} + 7\text{وه} \quad \text{و} \quad \text{سه}^3$$

(٦)

وفي الحالة العكسية يقال لها غير جذرية وذلك مثل $\sqrt[3]{2}$ في المعادلتين

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \quad \text{أو} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$

والدالة الجذرية اما ان تكون صحيحة واما ان تكون كسرية فالصحيحة ليست الا كمية كبيرة المحدود ومثل

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$

والكسرية ليست الا كسرا حدها كيتان كثيرنا المحدود كالدالة

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$$

وما ذكرناه بخصوص تقسيم الدوال ذات المتغير الواحد يطبق بدون صعوبة على الدوال ذات المتغيرات المتعددة

(في طريقة النهايات)

بما قد متى قربت المقادير المتتالية لمتغير مثل $\sqrt[3]{2}$ شيئا فشيئا من مقدار كمية ثابتة وان تكن $\sqrt[3]{2}$ بحيث ان المقدار المطلق للفرق $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}$ يمكن ان يصير اصغر من كل كمية معلومة يقال ان الكمية الثابتة $\sqrt[3]{2}$ نهاية المتغير $\sqrt[3]{2}$ مثلا اذا اعطيت للعدد الصحيح $\sqrt[3]{2}$ مقادير آخذة في الكبر شيئا فشيئا فان النسبة $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ تقرب من الواحد قربا لانها $\sqrt[3]{2}$ لانه يمكن وضع هذه النسبة هكذا

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

ومتى زيد العدد $\sqrt[3]{2}$ زيادة لانها $\sqrt[3]{2}$ ينتهي الكسر $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ بان يكون اقل من كل كسر معلوم اتيما كان صغره وحينئذ تكون النسبة $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ كمية متغيرة نهايتها الواحد متى زيد الى ما لانها $\sqrt[3]{2}$

وكذا اذا اعتبر التابع الغير المحدود وهو

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots$$

واخذت منه حدود عددها $\sqrt[3]{2}$ مبتدئة بالحد الاول وجمعت على بعضها بشاهد بدون

صعوبة

* (٧) *

صعوبة ان هذا المجموع يختلف عن الواحد بكمية تساوى $\frac{1}{3}$ وهذه الكمية تنتهى بأن
نصبر أصغر من كل عدده معلوم متى زيد ∞ الا ما لانهاية وحينئذ اذا اعتبرت حدود
عددها آخذنى الازدياد الى ما لانهاية تكون مجموعها كمية متغيرة نهايتها الواحد
وكذا مساحة الدائرة نهاية مساحة المصطلح المنتظم المرسوم داخلها الذى يزيد عدد
اضلاعه الى ما نهاية

وكذا العدد الا صم ليس الا نهاية الكسور التى تقرب مقاديرها شيئاً فشيئاً من هذا العدد
الاصم

وكذا اذا اعتبر قوس وجيبه فان النسبة $\frac{\text{جاسه}}{\text{سبه}}$ التى هى أصغر من الواحد دائماً يمكن أن
لا تفرق عنه الا بكمية صغيرة بقدر ما يراد اذا أعطى للتغير سبه مقادير آخذنى الصغر شيئاً
فشيئاً وحينئذ تكون النسبة $\frac{\text{جاسه}}{\text{سبه}}$ كمية متغيرة نهايتها الواحد

بشئ ∞ (تنبيه) * يمكن أن تكون الكمية المتغيرة أصغر من نهايتها وذلك كالنسبة
 $\frac{\text{جاسه}}{\text{سبه}}$ متى أعطى للقوس سبه مقادير آخذنى الصغر شيئاً فشيئاً ويمكن أن تكون أكبر
من نهايتها وذلك كالنسبة $\frac{1+\infty}{\infty}$ متى أعطى للعدد الاصم ∞ مقادير آخذنى الكبر شيئاً
فشيئاً بل يمكن ان تكون تارة أكبر وتارة أصغر من نهايتها مثلاً اذا أعطى لحرف سبه
مقادير تتغير من ابتداء الصفر الى ما لانهاية فمر الدالة

$$\frac{\text{جاسه}}{\text{سبه}} = \text{صه}$$

بسلسلة مقاديره وجبة وسالبة على التعاقب ومع ذلك فان نهاية هذه الدالة صفر
بشئ طريقة النهايات مؤسسة على هذه القاعدة البديهية وهى متى كان متغيران
متساويين في جميع الدرجات المتتالية التى يمران بها ومال احدهما الى نهاية ما فان
الآخر يميل أيضاً الى هذه النهاية

ومن هذه القاعدة نتج هذه النظرية الاساسية وهى

لنعتبر معادلة طرفاها دالتان لمتغيرات سبه و صه دع ∞ ولتكن

$$\text{د} = (\text{سبه و صه دع } \infty) \quad \text{د} = (\text{سبه و صه دع } \infty)$$

ولنفرض ان المتغيرات سبه و صه دع ∞ تميل الى النهايات $\text{ك} و \text{ل} و \text{م} و \text{ن}$

بالتناظر فتكون نهايتا الدالتين $\text{د} = (\text{سبه و صه دع } \infty)$ و $\text{د} = (\text{سبه و صه دع } \infty)$

$$\text{هـ} و \text{و} = (\text{ك} و \text{ل} و \text{م} و \text{ن} \text{ دع } \infty) \quad \text{و} = (\text{ك} و \text{ل} و \text{م} و \text{ن} \text{ دع } \infty)$$

(٨)

وبموجب القاعدة السالفة الذكر تكون هاتان النهايتان متساويتين أعني أن

$$د(ك، ل، م، و) = د(ك، ل، م، و) \dots$$

بمعنى أن الارتباط الواقع بين المتغيرات سم، د، و، ع، ... يكون واقعا بعينه بين نهاياتها وهي ك، ل، م، و، ... وأنه يكفي لأجل الحصول على الارتباط الواقع بين هذه النهايات أن يعوض كل متغير بنهايته

(نتيجه) - الانيات السابق هو يفرض أن الدالتين د(سم، د، و، ع، ...) و د(سم، د، و، ع، ...) تقربان قربا لانياتهما من المقدارين د(ك، ل، م، و، ...) و د(ك، ل، م، و، ...)

د(ك، ل، م، و، ...) متى مالت المتغيرات سم، د، و، ع، ... من نهاياتها وهي

ك، ل، م، و، ... وهذه هي على العموم خاصية الدوال المستعملة في التحليل الجبري فإذا لم تقع هذه الخاصية في حالة خصوصية لا يمكن تطبيق النظرية المتقدمة

والنظرية السابقة هي المؤسسة عليها طريقة النهايات وهي

لأجل إيجاد الارتباط الواقع بين جملة كيات تكون كيفية مقارنتها ببعضها مباشرة غير معلومة تعتبر هذه الكيات نهايات لكيات أخرى متغيرة يمكن بالسهولة مقارنتها ببعضها ثم يبحث حيثئذ عن الارتباط الواقع بين هذه الكيات المتغيرة وبواسطة النظرية المتقدمة يستخرج

منه مباشرة الارتباط الواقع بين نهاياتها أعني الواقع بين الكيات المراد مقارنتها ببعضها مثلا لنفرض أن المطاوب البحث عن الارتباط الواقع بين حجم اسطوانة قائمة قاعدتها دائرة وبين قاعدتها وارتفاعها فلذلك نرمز بحرف ح لحجم هذه الاسطوانة وبحرف د لمساحة قاعدتها وبحرف ع لارتفاعها ثم نرمز داخل القاعدة مضلعا منتظما بعد اضلاعه جميعا اتفق ولتكن ق مساحة هذا المضلع و ح المساحة الجسمية للنشور القائم الذي قاعدته المضلع المذكور وارتفاعه ارتفاع الاسطوانة فيكون

$$ح = د \cdot ع$$

فإذا زيد عدد اضلاع المضلع الى ما لا نهاية تكون نهايتا ق و ح اللتين هما قاعدة المنشور وحجمه هما الكيتان د و ح اللتان هما قاعدة الاسطوانة وحجمها أعني أن

$$نهاية د = ح$$

وبموجب النظرية المتقدمة نستنتج من المعادلة السابقة هذه المعادلة

$$ح = د$$

وبذلك

•(٩)•

وبذلك يتوصل بواسطة النهايات على الارتباط الواقع بين الكميات $ح$ و $و$ ، $ع$ الغير الممكن مقارنتها ببعضها مباشرة
مثال آخر - ثبتت بالهندسة التحليلية ان شرط تعامد مستقيمين يكون بينهما هذه
المعادلة

$$١ + \frac{د}{ح} + \frac{و}{ع} = ٠ \quad (٦ + \frac{و}{ح}) \text{ جتا } = ٠$$

التي فيها حرف $و$ رمز للزاوية الواقعة بين المحورين الاحداثيين وحرف $د$ ، $ح$
الذي اخلاص فيهما رمز ان للعاملين الزاويين المستقيمين لكن هذه المعادلة لا تناسب الحالة
التي يكون فيها احد المستقيمين موازيا لمحور الصادات اذ ان معامل الزاوي $د$ يصير
لانهايا وحيث ان كان يلزم ان يحسب مباشرة المعامل $م$ للمستقيم المود على الاول
لكن بواسطة طريقة النهايات يمكن استخراج هذا المعامل وهو $م$ من المعادلة
المتقدمة ولذلك نضعها في اول الامر بالصورة

$$\frac{١}{ح} + \frac{د}{ع} + (١ + \frac{و}{ح}) \text{ جتا } = ٠$$

ثم نتصور ان المستقيم الاول يقرب شيئا فشيئا من ان يصير موازيا لمحور الصادات فيقرب
الثاني شيئا فشيئا من ان يصير عمودا عليه وتكون نهاية $د$ هي $م$ وتكون نهاية
 $\frac{١}{ح}$ ، $\frac{د}{ع}$ صفرا فاذا عوض كل متغير بنهايته يحدث

$$١ + \text{جتا} = ٠ \quad \text{أو} \quad م = - \text{جتا}$$

•(في الكميات الصغيرة جدًا والكميات الكبيرة جدًا أو اللانهاية)•

بمسند الكمية الصغيرة جدًا هي كل كمية متغيرة بنهايتها الصفر فعلى هذا يكون الفرق
بين أي كمية متغيرة ونهايتها كمية صغيرة جدًا
والكمية الكبيرة جدًا أو اللانهاية هي كل كمية متغيرة تأخذ مقادير متزايدة الى ما لا نهاية
بحيث تنتهي بان تكون أكبر من كل كمية معلومة وكل كمية لانهاية تبين بالرمز ∞
مثلا الكمر

$$١ + \frac{د}{ح} + \frac{و}{ع} = ٠$$

يصير لانهايا حيثما يكون $د$

ل تفاضل

٢

(في الرتب المختلفة للكميات الصغيرة جدًا)

به المسمى اعتبرته جملة كميات صغيرة جدًا متعلّقة بعضها ببعض الآخر وتتخلف منها كمية صغيرة جدًا تسمى بالصغيرة جدًا الأصلية وتُقارن بها الكميات الصغيرة جدًا الأخرى ولتبين كيفية المقارنة فنقول

لتسكن ϵ الصغيرة جدًا الأصلية ولتسكن ϵ صغيرة جدًا ثانية فيكون $\epsilon = \epsilon$.
و $\epsilon = \epsilon$ فإذا مات النسبة $\frac{\epsilon}{\epsilon}$ إلى نهاية محدودة مخالفة للصفر ولتسكن ϵ بحيث يكون

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = \epsilon + \epsilon$$

(ف صغيرة جدًا) يقال إن ϵ صغيرة جدًا برتبة أولى ومن القانون المتقدم يستنتج أن $\epsilon = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$

وهذا هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة أولى فإذا كانت النسبة $\frac{\epsilon}{\epsilon}$ صغيرة برتبة أولى يقال إن ϵ صغيرة جدًا برتبة ثانية وبهذا الفرض يكون

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$$

ويكون

$$\epsilon = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$$

وهذا هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة ثانية وحرف ϵ الداخل فيه رمز الكمية محدودة معينة مخالفة للصفر وحرف ϵ الداخل فيه رمز الكمية صغيرة جدًا

وعلى العموم يقال إن ϵ صغيرة جدًا برتبة n إذا كانت النسبة $\frac{\epsilon}{\epsilon}$ صغيرة جدًا برتبة $n-1$ فإذا فرض أن

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$$

هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة $n-1$ يكون

$$\frac{\epsilon}{\epsilon} = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$$

ويكون

$$\epsilon = \epsilon (\epsilon + \epsilon)$$

ويستنتج

ويستنتج من ذلك ان هذا القانون يشمل المقدار المجزئ العومى للكليات الصغيرة جدًا
التي برتبة ∞ مهما كان العدد الصحيح n ويجب أن يشبه الى ان حرف ∞ الداخلة
في هذا القانون رمز الكمية محدودة معينة مخالفة للصفر والى ان حرف ∞ الداخلة فيه
رمز الكمية صغيرة جدًا

وبموجب ما تقدم يمكن أن يقال أيضا ان رتبة أى كمية صغيرة جدًا مثل $\frac{1}{n}$ هي الاس ∞
للقوة التي يلزم رفع الصغيرة جدًا الاصلية وهي $\frac{1}{n}$ اليها لتتوصل نسبة $\frac{1}{n}$ تكون نهايتها
كمية محدودة معينة مخالفة للصفر وهذا التعريف يشمل الحالة التي لا يكون فيها ∞
عددا صحيحا

أمثلة — اذا جعل القوس ∞ صغيرة جدًا أصلية يكون جامع صغيرة جدًا برتبة
أولى وتكون الكمية $\frac{1}{n}$ — جناسه صغيرة جدًا برتبة ثانية وتكون الكمية $\frac{1}{n^2}$ — جناسه
صغيرة جدًا برتبة ثالثة

• (في طريقة الصغيرات جدًا) •

يتلذد الصغيرات جدًا كميات مساعدة تسعمل لاجل تسهيل حساب الكميات المحدودة
وذلك أن تعتبر الكمية التي يبحث عنها نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جدًا ثم يبحث
عن مقدار هذه النهاية أو تعتبر الكمية التي يراد حسابها محالة الى أجزاء صغيرة جدًا
متساوية أو غير متساوية كل منها يعمل الى الصفر اذا زيد عددها الى ما لانهاية ثم يقدر
كل جزء من هذه الأجزاء ويبحث عن النهاية التي يعمل اليها المجموع متى زيد عددها الى
ما لانهاية

وطريقة الصغيرات جدًا تنحصر في هاتين النظريتين وهما
بتلذد النظرية الاولى — نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جدًا لا تتغير اذا عوضت
هاتان الصغيرتان جداب صغيرتين جدًا أخريين بشرط أن تكون نهاية النسبتين
الواقعتين بين هاتين الأخيرين والاولين بالتناظر هي الواحد
لأننا اذا فرضنا ان $\frac{1}{n}$ هما الصغيرتان جداب المفروضتان وأن $\frac{1}{m}$ صغيرتان
جداب أخريان بحيث ان

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

يكون $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$

واذن يكون

$$\frac{n+1}{n+1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وحيث ان نهاية $\frac{1}{n}$ هي الواحد بداهة فيكون

$$\frac{1}{2} \text{ 4: } = \frac{1}{2} \text{ 4: }$$

ويمكن النطق بهذه النظرية بـ كـيفية أخرى بواسطة هذه النظرية وهي
 متى كانت نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جداهي الواحد يكون الفرق بينهما كمية
 صغيرة جدا بالنسبة لكليهما لأنه اذا كان

نہا $\frac{1}{2} = 1$ ہکون $\frac{1}{2} = 1 + 1 = 2$

و حرف ف رمز لكبة صغيرة جدا ومن هنا يتج أن

$$\frac{f}{f+1} = \frac{f-1}{f}, \quad f = \frac{f-1}{f}$$

وبالعكس ككتاهاتين المتساويتين الاخيرة في تؤدي الى أن $\frac{1}{2} = 1$
ويخرج من ذلك انه يمكن النطق بالنظرية بأن نهاية النسبة الكائنة بين أي
صغيرتين لا تتغير اذا زيدت أو نقصت ككتاهما بكمية صغيرة جدا بالنسبة لهما
مثال — اذا كان القوس θ صغيرة جدا و θ و θ صغيرتين ثابتين
تكون الكيتان θ و θ جا θ و θ صغيرتين جدا وغير ذلك فان نهاية تسببهما
الى القوسين θ و θ هي الواحد وحينئذ يكون

$$\frac{f}{g} = \frac{f \cdot h}{g \cdot h} = \frac{f \cdot h}{g \cdot h}$$

بـ٤٤١ النظرية الثانية - لتكن

$\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}$

صغیرات

(١٣)

صغيرات جدا موجبة يز يدعدها وهو م الى ما لانهاية فاذا كان مجموع هذه
الصغيرات جدا مساويا لقيمة معينة ولتكن ع ا و اذا كان هذا المجموع متغيرا ويميل
الى النهاية ع وكانت الكميات

$$f, g, h, \dots, r$$

صغيرات جدا أقول إن

$$f + g + h + \dots + r$$

يميل الى الصفر أى يكون صغيرة جدا

لأننا اذا رمزنا بحرف ن لأكبر الصغيرات جدا وهى f, g, h, \dots, r ف

في المقدار المطلق يكون المقدار المطلق للمجموع $f + g + h + \dots + r$

أقل من $(f + g + h + \dots + r)$ ف لكن هذا المحاصل كمية صغيرة جدا حيث أن

نهاية العامل الاول كمية محدودة والعامل ن كمية صغيرة جدا فحينئذ يكون المجموع

$$f + g + h + \dots + r$$

كمية صغيرة جدا

نتيجة - نهاية مجموع كميات صغيرة جدا لانهاية لعدد هالاية غير منى عوضت هذه

الكميات بصغيرات جدا أخرى نهاية النسب الكائنة بين هذه الصغيرات الاخرية

والاولى بالتناظر هى الواحد

ولاثبات ذلك نفرض أن

$$f, g, h, \dots, r$$

هى الصغيرات جدا المفروضة وأن

$$f, g, h, \dots, r$$

صغيرات جدا أخرى نهاية نسبها الى الاولى بالتناظر هى الواحد فيكون

$$\frac{f}{f} = 1, \frac{g}{g} = 1, \frac{h}{h} = 1, \dots, \frac{r}{r} = 1$$

أو

$$f = f, g = g, h = h, \dots, r = r$$

•(١٤)•

وبموجب النظرية يعلم انه اذا كان

$$n_1 = (1 + \dots + 1 + 1 + 1 + 1) = 5$$

يكون

$$n_2 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 8$$

وحيث ان يكون

$$n_3 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 10$$

وهو المطلوب اثباته



الباب الاول

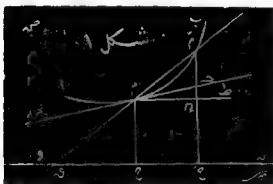
(في مارق حساب التفاضلات)

الفصل الاول

(في خواص مشتقات وتفاضلات الدوال ذات المتغير الواحد)

• (في أصل حساب التفاضل) •

بهذا قد توصل الى كشف حساب التفاضل حين البحث عن طريقة عمومية لرفع مقامات
المشتقات المعروفة بمعادلاتها فلقد تصور متغيرين وليكونا x و y مرتبطين ببعضهما
ارتباطا دائما ما كان بحيث ان احدهما يكون دالة للآخر ولنتعبر هذين المتغيرين احداثيتين
لنقطة منسوبة الى محورين قائمين متساويين في مستوي ثم نرسم المنحنى am (شكل ١)



الذي معادلته هي $y = f(x)$ ونفرض
ان هذا المنحنى حقيقي في امتدادها ونفرض
ان المطلوب رسم المستقيم المماس له في النقطة
م التي احداثياتها x_0 و y_0 فيعرف
المماس عادة بأنه هو النهاية التي يسيل اليها
قاطع مماسي تحرك هذا القاطع حول نقطة من

نقط تقاطعه بالمنحنى بحيث تقرب نقطة تقاطع أخرى قربا لانها ثابتة من الاولى وحينئذ
لتكن m نقطة ثانية من المنحنى احداثياتها x_1 و y_1 و m_0 و m_1 ولنتعبر القاطع
 $m_0 m_1$ والمماس m الذي هو نهايته فنالثلث $m_0 m m_1$ يحدث

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

• (١٧) •

فتركب النسبة $\frac{1}{2}$ من جزئين أحدهما لا يتعلق بالزيادة $\frac{1}{2}$ والاخر يحتوي على $\frac{1}{2}$
 تاملا مشتركا بحيث أنه اذا تناقص $\frac{1}{2}$ الى أن يؤل الى الصفر يمكن أن يصير هذا الجزء
 الثاني صغيرا بقدر ما يراد واذا ن يكون

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ويمكن أيضا أن يفصل على هذه المشتقة بدون استعمال قانون فونون. ولذلك نضع

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

فيكون

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

وبملاحظة أن $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ يستنتج أن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ومنى تناقصت الزيادة $\frac{1}{2}$ الى أن آلت الى الصفر يقرب $\frac{1}{2}$ قريبا لانها ثابتا من $\frac{1}{2}$
 ولكن ان الطرف الاخير يحتوي على حدود عددها $\frac{1}{2}$ يؤل كل منها الى $\frac{1}{2}$ متى
 مرالى النهاية فيكون

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

أعني أن

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ونائباً لتكن الدالة

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

(وحرف $\frac{1}{2}$ من زمر العدد صحيح موجب) فيكون

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ل

تفاضل

٢

(١٨)

ويكون

$$\frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

وبالتفصيل والقمة على n يحدث

$$\frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2} = \frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2}$$

وبالمرور الى النهاية يحدث

$$\frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

وحينئذ يكون

$$1^2 - (n+1)^2 = 1^2 - (n+1)^2$$

فيشاهد أن القاعدة التي نتوصل بها على مشتقة n متى كان n عددا صحيحا تطبق مهما كانت إشارة n

وفالآن لتكن الدالة

$$y = 1^2 - (n+1)^2$$

$$y = 1^2 - (n+1)^2$$

فيكون

وبناء على ذلك يكون

$$y = 1^2 - (n+1)^2$$

فإذا جعل $x = 1$ يوجد الطرف الثاني بالصورة $y = 1^2 - (n+1)^2$ فلاحظ الحصول على مقداره الحقيقي بضرب هذا الكسر الموجود في الطرف الثاني في مجموع الجذرين الذين يشتمل البسط على فرقهما فيحدث

$$\frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2} = \frac{1^2 - (n+1)^2}{1^2 - (n+1)^2}$$

أو

وحينئذ

(١٩)

$$\text{وحيث يكون} \quad \frac{\text{نهاك}}{\text{صه}} = \frac{\text{صه}^2}{\text{صه} - \text{صه}^2} = \frac{\text{صه}^2}{\text{صه} - \text{صه}^2}$$

$$\text{أعني أن} \quad \frac{\text{صه}}{\text{صه} - \text{صه}^2}$$

وقد وجدنا مشتقات الدوال المتقدمة، بكيفية سريعة ومهلة لكن الطرق التي استعملناها لا تكفي إذا أردنا إيجاد مشتقات دوال أكثر تركيباً والذي يوصل إلى ذلك هو علم حساب التفاضل

(في التفاضل)

بزيادة لتكن الدالة

$$\text{صه} = \text{صه}(\text{صه})$$

ولنحط للتغير صه زيادة حينما اتفق ولتكن > سواء كانت موجبة أو سالبة ولتسكن
ك الزيادة التي تزيد بها الدالة صه فيكون

$$\text{صه} + \text{ك} = \text{صه}(\text{صه} + \text{ك})$$

وحيث أن نهاك = صه فيجب أن يكون

$$\frac{\text{ك}}{\text{صه} + \text{ك}} = \text{صه}$$

وحرف ل رمز لكمية تتصلق بكميتي صه و د وتقبل إلى الصفر حينما يميل د إلى
الصفر ومن ذلك ينتج أن

$$\text{ك} = \text{صه} \cdot \text{د}$$

فتتركب الزيادة ك التي هي زيادة الدالة من جزئين مميزين أولهما وهو صه حاصل
ضرب مشتقة الدالة في زيادة المتغير الغير المتعلق وهذا المحاصل يسمى تفاضل الدالة
صه ويرمز له بالرمز فاصه بحيث يكون

$$\text{فاصه} = \text{صه} \cdot \text{د} = \text{صه}(\text{صه})$$

وفا في الجزئين هو حاصل ضرب د في كمية لا تتقدم حينما يتقدم د ولا يشتغل
بهذا المجره

وتفاضل المتغير الغير المتعلق ليس إلا الزيادة > لانه اذا اعتبرنا الدالة

$$\text{صه} = \text{صه}$$

(٢٠)

$$صه + ك = صه + د$$

يكون
واذن يكون

$$ك = د$$

ويكون

$$١ = \frac{ك}{د}$$

ويعلم من ذلك ان مشتقة صه هي ١ واذن يكون التفاضل

$$فامه \text{ أو } فامه = د \times ١ = د$$

وبناء على ذلك يمكن كتابة القانون

$$فامه = صه د$$

$$فامه = صه فامه$$

هكذا

أعني ان تفاضل أى دالة يساوى حاصل ضرب مشتقها في تفاضل متغيرها الغير المتعلق

وليس تفاضل المتغير الغير المتعلق الا الزيادة الاختيارية التي تعطى له

ومن هذا القانون الأخير نستنتج أن

$$\frac{صه}{فامه} = \frac{فامه}{فامه}$$

أعني ان مشتقة أى دالة ذات متغير واحد هي خارج قسمة تفاضل هذه الدالة على

تفاضل متغيرها ولذا تسمى المشتقة كذلك نسبة تفاضلية أو خارجا تفاضليا

بذلك يمكن بيان التفاضل بيناه هندسيا لانه اذا فرضنا ان $م$ (شكل ٢) المنحنى

المبين بالمعادلة

$$صه = د(مه)$$

يكون

$$فامه = د \times مه + مه \frac{د}{د}$$

لكن

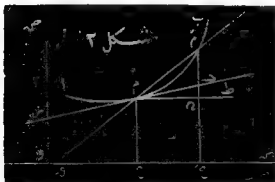
$$د = د \times فامه + فامه$$

فاذن يكون

$$د = د \times فامه + فامه$$

وحينئذ يكون $د$ دالة على التفاضل اذا كان $م = د = فامه$

وبشاهد



(٢١)

ويشاهد من ذلك ان فاصه و فاصه هما الزيادةان المتناظران للتغيرين δ و δ متى مر من نقطة الخامس م الموجودة على المنحنى الى نقطة حيثما اتفق δ من الخامس بخلاف ك أو م و فانها هي الزيادة التي يزيد بها رأس المنحنى متى زيدا فقيه زيادة قدرها $\delta = \delta$ فاصه

بهذا نرى ان نسبة الكائنة بين زيادة أى دالة وتفاضلها تساوى الواحد بشرط ان لا تكون مشتقة هذه الدالة معدومة لانه من المعادلة

$$\frac{\delta}{\delta} = \delta + \delta$$

يستخرج

$$\delta = (\delta + \delta)$$

وقد علم ان

$$\delta = \delta$$

فاذن يكون

$$\frac{\delta}{\delta} = \delta + \delta + 1 = \frac{\delta}{\delta}$$

وحينئذ اذا لم تكن δ معدومة يكون

$$1 = \frac{\delta}{\delta}$$

(في خواص المشتقات والتفاضلات)

بنسبة الارتباط

$$\delta = (\delta + \delta)$$

يوصل الى جملة نتائج نذكرها فنقول

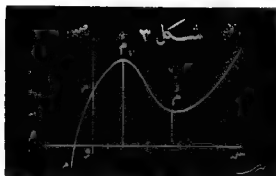
لنعطى δ تغيره مقدار معيناً فينتج للمشتقة وهي δ مقدار معين كذلك ثم اذا اعطى للتغير δ زيادة صغيرة جداً تكون إشارة δ هي إشارة δ حيث ان δ يمكن ان يصير δ بغير ما يراد وحينئذ تكون إشارة الزيادة δ هي إشارة δ وحيث ان δ يؤخذ موجبة فتكون إشارة δ هي إشارة δ وحينئذ اذا كانت المشتقة δ موجبة تكون الزيادة δ موجبة بمعنى ان الدالة تكون متزايدة واذا كانت δ سالبة تكون الدالة متناقصة فيعلم من ذلك ان أى دالة تكون متزايدة

(٢٢)

أو متناقصة بالابتداء من المقدار الذي يكون لها حينما يسقط للتغير منه مقدار من على حسب ما تكون مشتقتها موجبة أو سالبة بمقدار منه المذكور وينتج من ذلك أنه إذا بقيت مشتقة أى دالة موجبة على الدوام متى تغير منه بالابتداء من مقدار، وليكن > الى مقدار آخر وليكن < فإن هذه الدالة تكون متزايدة على الدوام والاستمرار بمقادير منه المحصورة بين العددين > و < ويكون الامر بالعكس إذا كانت المشتقة سالبة
مثلاً نأخذ الدالة

$$صه = \frac{1}{3}صه^3 - 2صه^2 + 3صه + 1$$

والنعتبر المنحنى المبين بهذه المعادلة



حينما يكون $صه = 0$ يكون $صه = 1$
و حينما يكون $صه = 1$ يكون $صه = \frac{1}{3}$
و حينما يكون $صه = 2$ يكون $صه = \frac{2}{3}$
و حينما يكون $صه = 3$ يكون $صه = 1$
و حينما يكون $صه = -1$ يكون $صه = -\frac{1}{3}$

فإذا رسمت هذه النقاط المختلفة يعلم أن المنحنى يكون تقريباً بالصورة م م م م (شكل ٣) لكن إذا أريد معرفة مقادير منه التي تجعل الرأسى متزايداً ومتناقصاً يؤخذ مشتقة منه فيوجد أن

$$صه = صه^2 - 4صه + 3 = (صه - 1)(صه - 3)$$

و حينئذ يشاهد أنه إذا زيد منه من ٠ الى ١ تكون المشتقة منه موجبة وحينئذ يكون الرأسى منه متزايداً بالابتداء من نقطة م الى نقطة م وفي نقطة م التي أتقيا منه = ١ يكون منه = ٠ أعني أن المناس في هذه النقطة مواز للمحور السينات ثم إذا زيد منه من ١ الى ٣ تصبح المشتقة منه سالبة وحينئذ يكون الرأسى متناقصاً بالابتداء من نقطة م الى نقطة م وحينئذ إن منه = ٠ حينما يكون منه = ٣ فيكون المناس في هذه النقطة الأخيرة موازياً للمحور السينات ثم إذا أعطيت للتغير منه مقادير تأخذ في الازدياد بالابتداء من ٣ تكون المشتقة منه

موجبة

موجبة دائما وحينئذ يكون رأسي المتغير متزايدا دائما بالابتداء من نقطة ∞ فإذا
أعطى للمتغير x مقدار سالب تكون المشتقة y موجبة مهما كان هذا المقدار
السالب وبنا على ذلك تكون المقادير التي تنتج للرأسي آخذة في الازدياد أيضا حينما
يعطى للافقي x مقادير سالبة. وينبغي ان يفتبه الى ان السكينة السالبة تزيد متى نقص
مقدارها المطلق
يستنتج من القانون

$$K = (x + 1)$$

انه اذا كانت مشتقة الدالة معدومة بجميع مقادير المتغير x المحصورة بين عددين
وليكونا a و b يكون مقدار هذه الدالة ثابتا بجميع المقادير المذكورة ($a < x < b$)
مفروض أكبر من a)
لانه حيث كانت نهاية $x = \infty$ فرضا فلو أعطى للمتغير x مقدار محصور بين a و b
يكون المقدار المطلق للنسبة $\frac{y}{x}$ لـ x بشرط ان يكون x صغيرا صغرا كافيا (وحرف
في رمز السكينة معينة يمكن اخذها صغيرة بقدر ما يراد) ومن هنا يستنتج ان $K < x < \infty$
اذا قرر هذا واعتبرنا الآن مقدارين x و y حيثما اتفق من مقادير x المحصورة بين العددين
 a و b وليكونا a و b أقول ان مقدار y المناظرين لهما وليكونا a و b و c
يكونان متساويين لاننا لو أعطينا للمتغير x مقادير محصورة بين a و b و c ومترابطة
زيادات متساوية كانت أو غير متساوية لسكنها صغيرة صغرا كافيا بحيث انه بكل منها
يكون $K < x < \infty$ (K مأخوذة موجبة) فنحصل على جملة متباينات صورتها كصورة
المتباينة المتقدمة ولو أضفنا هذه المتباينات على بعضها لتنتج ان مجموع الزيادات المتتالية
للدالة y مأخوذة جميعها موجبة أصغر من مجموع حواصل الضرب في x أعني أصغر
من حاصل ضرب السكينة في مجموع زيادات المتغير x وهو $b - a$ و $c - a$ وحينئذ
بالاولوية يكون مجموع الزيادات المتتالية للدالة مأخوذة بأشاراتها وهو $b - a$ و $c - a$
أصغر من $(b - a)$ واذن يكون

$$y - (b - a) < (c - a)$$

وحيث انه يمكن جعل السكينة في صغيرة بقدر ما يراد فيصير الفرق $y - (b - a)$ أصغر

•(٢٤)•

من كل كمية معلومة أعني بصير معدوما وحيفئذ يكون

$$صه = صه =$$

$$صه = صه$$

أو

وحيفئذ تكون الدالة صه حافظة لمقدار واحد بجميع مقادير صه المحصورة بين العددين $د$ و $ز$ وهو ما أردنا اثباته ويمكن اثبات هذه النظرية بطريقة مذكورة في مبحث من الجزء الثاني من السجلات التوفيقية في الاصول الجبرية فراجع ان شئت

بمبدأ الى الآن قدر مرز يادق المتغيرين $صه$ و $صه$ بحرفي $د$ و $ز$ بالتناظر لكن بسبب انه من الآن فصاعدا تعتبر جملة متغيرات في آن واحد فيرى انه من اللازم استعمال رمز يدل على المتغير المناسبة له الزيادة ولذلك يستعمل حرف $ف$ متبوعا بالحرف المرموز به للمتغير مثلا اذا اعتبرت عدة متغيرات ولتكن $صه$ و $صه$ و $ع$ و $ز$ مرتبطة ببعضها بجملة معادلات بحيث ان أحدها يكون متغيرا غير متعلق يستدل على الزيادات المتناظرة لهذه المتغيرات بالرموز $فصه$ و $فصه$ و $فع$ و $فز$ فاذا اعتبر $صه$ مثلا متغيرا غير متعلق تكون النهايات المتناظرة للنسب

$$\frac{فصه}{فصه} \text{ و } \frac{فع}{فصه} \text{ و } \frac{فز}{فصه}$$

$$\frac{فاصه}{فاصه} \text{ و } \frac{فاع}{فاصه} \text{ و } \frac{فاه}{فاصه}$$

هي

مقي مال $فصه$ الى الصفر

بمبدأ اذا تساوت دالتان بجميع مقادير المتغير الغير المتعلق أقول ان تفاضلهما يكونان متساويين وان مشتقتهما تكونان متساويتين.

ولا يثبت ذلك نفرض ان $د$ و $ز$ دالتان متساويتان لمتغير $صه$ ولتزد $صه$ زيادة $ما$ $فصه$ و $فصه$ و $فز$ و $فز$ و $فاه$ و $فاه$ و $فاه$ و $فاه$ بالتناظر مقابلة للزيادة $فصه$ فيحدث

$$فصه + فز = فز + فز$$

ولكونان $فصه = فز$ يكون

$$فصه = فز$$

واذن

واذن يكون

$$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق}$$

وحيث ان هذه المعادلة تحصل مهما كان صغر ق سمه فحصل ايضا عند النهاية
وحيث ان نهاية $\frac{ق}{ق}$ هي مشتقة ق أى هي $\frac{ق}{ق}$ وان نهاية $\frac{ق}{ق}$ هي
كذلك $\frac{ق}{ق}$ فيكون

$$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق} \text{ أو } ق = ق$$

وهذه النظرية تصدق متى افترقت الدالتان المفروضتان عن بعضهما بكمية ثابتة
لاتناذا فرضنا ان

$$ق = ق + ث$$

وآل سم الى سم - ث سم يكون

$$ق + ق = ق + ق + ث$$

ولداعى ان $ق = ق + ث$ يكون

$$ق = ق + ث$$

$$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق}$$

ويكون

$$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق}$$

وحيث ان يكون

$$ق = ق$$

ويكون

اعنى ان تفاضل الدالتين المفترقتين عن بعضهما بكمية ثابتة يكونان متساويين
بـ $\frac{ق}{ق}$ وبالعكس أى اذا تساوى تفاضلا الدالتين اقول ان هاتين الدالتين تكونان
مفترقتين عن بعضهما بكمية ثابتة

لانه ثبت ذلك نفرض ان $ق = ق - ث$ ونفرض ان

$$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق}$$

$$ق = ق - ث$$

فن المعادلة

$$ق + ق = ق + ق - ث$$

ينتج ان

$$ق = ق - ث$$

واذن يكون

ويكون

$$\frac{ف}{ص} = \frac{ف}{ص} - \frac{ف}{ص}$$

وعند النهاية يكون

$$\frac{ف}{ص} = \frac{ف}{ص} - \frac{ف}{ص} = 0$$

فعلى هذا تكون المشتقة $\frac{ف}{ص}$ دومة واذن يكون الفرق $ص$ كمية ثابتة وهو ما أردنا ثباته

(في نظرية دوال الدوال)*

بشأن متى كان

$$s = v$$

• وكانت $ص$ دالة للتغير ولكن s يقال ان $ص$ دالة دالة $ص$ ولايجاد مشتقة $ص$ بالنسبة للتغير $ص$ يمكن تعويض $ص$ بمقدارها بالنسبة للتغير $ص$ وهو s وبذلك يكون

$$\left\{ \frac{ف}{ص} \right\} s = v$$

الا انه يمكن اجتناب هذا التعويض لانه يمكن وضع المتطابقة

$$\frac{ف}{ص} = \frac{ف}{ص} \times \frac{ف}{ص}$$

التي فيها $ف$ رمز لزيادة التغير الغير المتعلق وفيها $ص$ $ف$ زيادتها $ص$ بالتناظر فاذا فرض ان $ف$ $ص$ يميل الى الصفر يكون

$$\frac{ف}{ص} = \frac{ف}{ص} \times \frac{ف}{ص}$$

• لكن $\frac{ف}{ص}$ هي مشتقة $ص$ بالنسبة الى $ص$ أي هي $\frac{ف}{ص}$ و $\frac{ف}{ص}$ $s = v$ (ص) واما $\frac{ف}{ص}$ فانها s أي مشتقة الدالة s باعتبار $ص$ فيها متغيرا غير متعلق لان هذه النهاية لا تتعلق بالارتباط الواقع بين $ص$ و $ص$ ويكفي للتخصيص صيغته $ف$ $ص$ الى أن يميل الى الصفر وحينئذ يكون

(١)

$$\frac{ف}{ص} = s \frac{ف}{ص} (ص)$$

أعني

* (٢٧) *

أعني ان مشتقة دالة تساوي حاصل ضرب مشتقتي هاتين الدالتين
بـ $\frac{1}{\text{فاسه}}$ اذا عوضت $\frac{1}{\text{فاسه}}$ في معادلة (١) بمقدارها وهو $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$ بحيث

$$\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right)$$

واذن يكون

$$(٢) \quad \text{فا} = \text{فاسه} \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right)$$

فيشاهدان تفاضل الدالة $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$ متى كان فاسه مساويا للدالة $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$ (سه) تكون
صورته كالمو كان فاسه متغيرا غير متعلق الا انه يلزم في التطبيقات تعويض فاسه
بمقداره وهو $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$ (سه) فاسه

بـ $\frac{1}{\text{فاسه}}$ ويمكن وضع معادلة (١) بصورة اخرى ولذلك بلا حظ ان

$$\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right) \quad \text{و} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right)$$

وحينئذ يكون

$$(٣) \quad \frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} \cdot \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$$

ويلزم ان ينتبه الى ان هذه المساوية ليست متطابقة لان معنى $\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}}$ في $\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}}$ غير معناه
في $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$ فان $\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}}$ يدل في المقدار الاول على الزيادة الصغيرة جدا المتغيرة فاسه معتبرا
متغيرا غير متعلق ومعنى $\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}}$ في $\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}}$ تفاضل فاسه معتبرا دالة لتغير فاسه

مثلا ليكن

$$\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \text{فاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \sqrt{\text{فاسه} - \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}}$$

فن هنا يكون

$$\frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \left(\sqrt{\text{فاسه} - \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}} \right) = \text{فاسه}$$

وبناء على ما علم في المثال الاول والثالث المذكورين في بيانه يكون

$$\text{فا} = \text{فاسه} = \text{فاسه} \quad \text{و} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فاسه}}{\sqrt{\text{فاسه} - \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}}}$$

(28)

وحيث يكون

$$\text{فاو} = \text{م} \left(\sqrt{\frac{\text{ف} - \text{س}}{\text{ف} - \text{س}}} \right)^{1-\text{ف}} = \frac{\text{س} \text{ فاسه}}{\text{ف} - \text{س}} \sqrt{\frac{\text{ف} - \text{س}}{\text{ف} - \text{س}}} \quad \text{فاسه} = \text{م} \left(\sqrt{\frac{\text{ف} - \text{س}}{\text{ف} - \text{س}}} \right)^{2-\text{ف}}$$

بمساعدة ومتى كان

$$\text{و} = \text{س}(\text{و}) , \text{و} = \text{س}(\text{و}) , \text{و} = \text{س}(\text{و})$$

يوجد وجب ما تقدم إثباته أن

$$\text{فاو} = \text{س}(\text{و}) \text{فاو} , \text{فاو} = \text{س}(\text{و}) \text{فاو} , \text{فاو} = \text{س}(\text{و}) \text{فاو}$$

وحيث يكون

$$\text{فاو} = \text{س}(\text{و}) \text{س}(\text{و}) \text{س}(\text{و}) \text{فاو}$$

ويكون

$$\text{فاو} = \text{س}(\text{و}) \text{س}(\text{و}) \text{س}(\text{و}) \quad (4)$$

ويعلم من ذلك أن مشتقة الدالة و تساوي حاصل ضرب مشتقات الثلاث دوال

المكونة لهذه الدالة

وهذه القاعدة تصدق مهما كان عدد الدوال المكونة كما يشاهد بالمعولة



الفصل الثاني

في حساب تفاضلات الدوال ذات المتغير الواحد الغير المتعلق

(في تفاضل مجموع جبرى)

بـ ٢٩ د لتكن

$$ص = و + ع$$

(و و ع دوال لمتغير ص) فاذا آل ص الى ص + فن ص يكون

$$ص + فن ص = و + فن و + ع + فن ع$$

$$ص = و + ع$$

وحيث ان

$$فن ص = فن و + فن ع$$

فيكون

واذن فيكون

$$فن ص = فن و + فن ع$$

وبالمرور الى النهاية يحدث

$$فاصه = فاصه و + فاصه ع$$

واذن يكون

$$فاصه أو فاصه (و + ع) = فاصه و + فاصه ع$$

اعني ان تفاضل المجموع الجبرى لعدة دوال لمتغير واحد يساوي المجموع الجبرى لتفاضلات هذه الدوال

(في تفاضل حاصل ضرب)

بـ ٣٠ د ليكن المطلوب حساب تفاضل الدالة

$$ص = و ع$$

(٢١)

يكون $فأ = فب + فج$ فإ

أعني أن تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوي مجموع حاصل ضرب اللذين يحصل
عليهما بضرب كل دالة في تفاضل الدالة الأخرى

فإذا قسم القانون المتقدم على المحاصل منه أو $و$ يحصل

$$\frac{فأ}{و} + \frac{فب}{و} = \frac{فص}{و}$$

وقد سميت نسبة تفاضل أى دالة إلى هذه الدالة تفاضلا لوجاريتها وحينئذ يتبين من
هذا القانون الأخير أن التفاضل اللوجاري يتبقى لمحصل ضرب دالتين يساوي مجموع
التفاضلين اللوجاريين لماتين الدالتين

بـ ٢٢ د ولنعبر الآن بحاصل ضرب جملة دوال لتغير واحد غير متعلق مثل $ب$ به وليكن

$$ص = ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠$$

وهو هذا المحاصل في تطبيق القاعدة المتعلقة بالتفاضل اللوجاري يتبقى لمحصل ضرب
دالتين يحدث

$$\frac{فأ (١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠)}{١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠} + \frac{فب}{و} = \frac{فص}{و}$$

$$\frac{فأ (١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠)}{١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠} + \frac{فب}{و} + \frac{فج}{و} =$$

$$\frac{فأ (١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠)}{١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠ - ١١ - ١٢ - ١٣ - ١٤ - ١٥ - ١٦ - ١٧ - ١٨ - ١٩ - ٢٠ - ٢١ - ٢٢ - ٢٣ - ٢٤ - ٢٥ - ٢٦ - ٢٧ - ٢٨ - ٢٩ - ٣٠} + \frac{فب}{و} + \frac{فج}{و} + \frac{فد}{و} =$$

.....

فيتين من التساوية الأخيرة من هذه التساويات وهي

$$\frac{فأ}{و} + \dots + \frac{فب}{و} + \frac{فج}{و} + \frac{فد}{و} = \frac{فص}{و}$$

أن التفاضل اللوجاري يتبقى لمحصل ضرب جملة دوال يساوي مجموع التفاضلات
الوجارية لهذه الدوال

ولا جل إيجاب التفاضل $فص$ يكفى ضرب القانون المتقدم في $ص$ فيحدث

* (٢٢) *

$$\text{فام} = \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \dots + \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فام}}$$

اعني أن تفاضل حاصل ضرب عدة دوال يساوي مجموع حواصل الضرب التي يتحصل عليها بضرب تفاضل كل دالة في حاصل ضرب الدوال الأخرى

* (في تفاضل الكسر) *

بشأنه

$$\frac{\text{فام}}{\text{فام}}$$

(فام و دالتان لتغير واحد مع غير متعلق)

فبمجموع المقام يحدث

$$\text{فام} = \text{فام}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فام}} = \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فام}} = \frac{\text{فام}}{\text{فام}}$$

أو

فيثبت من هذا القانون ان التفاضل اللوغاريتمي لأي كسر يساوي التفاضل

اللوغاريتمي لبسطه ناقصا التفاضل اللوغاريتمي لمقامه

فاذا ضرب القانون المذكور في فام أو في $\frac{\text{فام}}{\text{فام}}$ يحدث

$$\text{فام} = \frac{\text{فام}}{\text{فام}} - \frac{\text{فام}}{\text{فام}}$$

$$\text{فام} = \frac{\text{فام} - \text{فام}}{\text{فام}}$$

أو

اعني ان تفاضل أي كسر يتحصل بضرب مقامه في تفاضل بسطه وطرح حاصل ضرب

بسطه في تفاضل مقامه من الناتج وقسمه الباقي على مربع مقامه

فاذا كان البسط دالة ثابتة يؤل تفاضل $\frac{\text{فام}}{\text{فام}}$ الى $\frac{\text{فام}}{\text{فام}}$

* (في تفاضل قوة دالة) *

بشأنه لتكن دالة لتغير مع ولنعتبر القوة

(٢٢)

(١)

$$م = \frac{ق}{ص}$$

(م رمز لعدد ثابت)

ولنفرض أولاً أن م عدد صحيح موجب ففي هذه الحالة تكون م حاصل ضرب عوامل عددها م كل منها يساوي ق وحينئذ يكون التفاضل اللوغاريتمي للدالة م مساوياً لمجموع التفاضلات اللوغاريتمية لهذه العوامل وحينئذ يكون

(٢)

$$\frac{قاصه}{ص} = \frac{ق}{ص} م$$

وثانياً لنفرض أن م عدد كسري موجب وليكن ك مقامه فيكون

$$\frac{ق}{ص} = \frac{ق}{ص} م ك$$

والتفاضل اللوغاريتمي للقوة ك هو ك $\frac{قاصه}{ص}$ والتفاضل اللوغاريتمي للقوة م ك

هو م ك $\frac{ق}{ص}$ اذن م ك عدد صحيح وحينئذ يكون

$$\frac{ق}{ص} = \frac{قاصه}{ص} م ك$$

وبحذف العامل ك يوجد قانون (٢)

وثالثاً لنفرض أن م عدد سالب صحيحاً كان أو كسرياً فبواسطة قانون (١) يحدث

$$م = \frac{ق}{ص}$$

وحيث أن الدالة $\frac{ق}{ص}$ ثابتة فيكون تفاضلها معدوماً ويكون تفاضلها اللوغاريتمي

وهو $\frac{قاصه}{ص} + \frac{ق}{ص} \left(\frac{ق}{ص} \right)$ معدوماً أيضاً وغير ذلك حيث أن م عدد موجب

فيكون $\frac{ق}{ص} \left(\frac{ق}{ص} \right)$ مساوياً للعامل م $\frac{ق}{ص}$ وحينئذ يكون

$$\frac{قاصه}{ص} - م \frac{ق}{ص} = ٠$$

أو

$$\frac{قاصه}{ص} = م \frac{ق}{ص}$$

وليس هذا القانون الا قانون (٢)

ويعلم من ذلك أن قانون (٢) عمومي ويحصل بهما كان الاس م فإذا ضرب هذا القانون في قانون (١) يحدث

ل تفاضل

(٢٤)

(٣)

فاصله $m^2 - n^2$ فان

وينج من ذلك أن تفاضل قوة أى دالة يساوى حاصل ضرب درجة القوة فى الدالة مرفوعة الى قوة درجتها تساوى الدرجة الاصلية ناقصة واحدا فى تفاضل الدالة المذكورة

بمثلة وهذه القاعدة تستعمل لحساب تفاضلات الجذور

مثلا

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

وفى الحالة التى يكون فيها $m = 2$ يكون

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{2r}}$$

أعني ان تفاضل الجذر التريعى لاى دالة يساوى تفاضل هذه الدالة مقسوما على ضعف الجذر

(تطبيقات)

بمثلة القواعد المتقدمة تكفى لحساب تفاضلات جميع الدوال الجبرية المحولة ولنعط

بعض أمثلة فنقول

أولا لتكن

$$ص = م^2 + ٥م + ٥م^2 + ...$$

فبتطبيق القواعد المتعلقة بالجمع والضرب والقوى يحدث

$$فاصله = (م^2 + ٥م + ٥م^2 + ...) = م^2 + ٥م + ٥م^2 + ...$$

وثانيا لتكن

$$ص = ٧ + \sqrt{٥} + \frac{٥}{٧} + \frac{٥}{٧^2} + \frac{٥}{٧^3} + ...$$

فيمكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$ص = ٧ + \frac{٥}{٧} + \frac{٥}{٧^2} + \frac{٥}{٧^3} + ...$$

وحينئذ يكون

فاصله

(٢٠)

$$\text{فامه} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right)$$

أو

$$\text{فامه} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right)$$

ونالنا لتكن

$$\text{صه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

فيكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$\text{صه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فامه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

$$= \frac{\text{صه}}{\sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}}$$

أو

$$\text{فامه} = \frac{\text{صه}}{\sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}}$$

ورابعه اليكن

$$\text{صه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

فيكون

$$\text{فامه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

$$\text{فامه} = \sqrt{\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20}}$$

أو

(تطبيقات على بعض مسائل بسيطة)

به ٣٧ د ولنبين الآن كيف ان حساب التفاضل يوصل الى معرفة المتغيرات المعلومه
المخواص وقبل الشروع في ذلك نذكر الطالب ببعض تعريفات فنقول

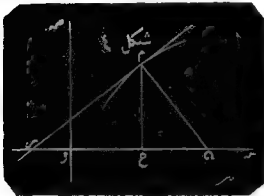
* (٢٦) *

إذا كان منحن منسوب إلى محورين أحداثيين مستقيمين وروم من إحدى نقطه بمماس
وعمودى فجزاهاذين المستقيمين المحصورين بين نقطة التماس ومحور السينات يقال لهما
على التناظر طول التماس وطول العمودى ومقطعا هذين الطولين على محور السينات
يسميان على التناظر تحت التماس وتحت العمودى
بـ ٢٨ المسئلة الاولى - المطلوب معرفة المنحنى الذى تحت عموديه يساوى كمية
ثابتة ولتكن ح

فلحل هذه المسئلة نفرض أن $س$ د هـ احداثيا نقطة حيثما تقع م من المنحنى
المحدث عنه فيمكن اعتبار هـ دالة للتغير $س$ وهذه الدالة هي اللازم إيجادها ولذلك
تعد الرأسى م ح لنقطة م والعمودى م د فيكون

$$ح م = ح م \times \text{ظل م د}$$

لكن م ح = هـ د ، ظل م د = م د / فاصه
(شكل ٤) فاصه / فاصه
فيثبت يكون



$$ح م = هـ د \times \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

وجب أن يكون

$$\text{فاصه} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

ومن هنا يستنتج أن

$$\text{فاصه} = ح م$$

$$\text{أو } ٢ \text{ فاصه} = ح م \text{ فاصه}$$

$$٢ \text{ فاصه} = \text{فا} (هـ د)$$

$$٢ \text{ فاصه} = \text{فا} (ح م)$$

فأذن يكون

$$\text{فا} (هـ د) = \text{فا} (ح م)$$

لكن قد علم أن الدالتين اللتين تفاضلاهما متساويان لا يمكن أن تقيرا فاعن بعضهما

* (٣٧) *

الابكية ثابتة بحيث اذا مرز بحرف ث لعد ثبات اختياري تكون معادلة المنحنى المطلوب هي

$$صه = حه + ث$$

وهذه المعادلة تدل على جميع القطاعات المكافئة المتحدة الكمية المخصصة وهي ح وعورها منطبق على محور السينات
بـ ٢٩ د المسألة الثانية - المطلوب معرفة المنحنى الذي عموديه يساوي كبة ثابتة معلومة ولتكن >

فيشاهد من الشكل المتقدم أن مربع العمود يساوي مجموع مربعي تحت العمود والرأسي وحيث ان يكون

$$صه = حه + \left(\frac{\text{فاصله}}{\text{فاصله}} \right)^2$$

ومن هذه المعادلة يستنتج أن

$$\frac{\text{فاصله}}{\sqrt{\text{ح} - صه}} = \text{فاصله}$$

ومهما كانت الاشارة التي يؤخذ بها الجذر $\sqrt{\text{ح} - صه}$ يكون لطرف الثاني لهذا القانون هو تفاضل $\sqrt{\text{ح} - صه}$ وبناء على ذلك يكون هذا القانون دالا على ان تفاضلي دالتي صه وهما

$$\sqrt{\text{ح} - صه} = د$$

متساويان وحيث لا يمكن أن تفرق هاتان الدالتان عن بعضهما الا بكبة ثابتة فلتكن هذه الكبة الثابتة هي ل فيكون

$$\sqrt{\text{ح} - صه} = د - ل$$

ومن هنا يحدث

$$صه = حه + (د - ل)^2$$

وهذه المعادلة تدل على الدوائر التي نصف قطرها > ومراكزها موجودة على محور السينات

* (٢٨) *

بنشد المسئلة الثالثة — المطلوب معرفة المعنى الذى تحت محاسبه مناسب نسبة
عكسية للراسى

فن الشكل المتقدم يعلم أن $ح = م$ ع نظام $م = ح$ $\frac{صه فاسه}{فاسه}$ وحينئذ تكون المعادلة
التفاضلية للمعنى المبحوث عنه هي

$$\frac{صه فاسه}{فاسه} = \frac{ف}{صه}$$

ومن هذه المعادلة يستنتج أن

$$\frac{ف فاسه}{صه} = \frac{ف}{صه}$$

لكن

$$\frac{ف فاسه}{صه} = - \frac{ف فاسه}{ف فاسه}$$

فحينئذ يكون

$$صه = - \frac{ف}{صه} + ث$$

$$صه صه = - ف + صه$$

أو

وحينئذ يكون المعنى المطلوب قطعاً زائداً قائماً احد خطيه التقريبين هـ ومحور السينات
وعطه التقريبي الاخر مواز لمحور الصادات

* (نظريه تتعلق بحساب تفاضل الدوال المركبة من عدة دوال

لتغير واحد غير متعلق) *

بإند جميع القواعد التى تحصلنا عليها الى الآن مختصرة كما شاهد قريه ان شاء الله
فعالى في نظريه هوميه تتعلق بعملية أخذ تفاضل دالة مركبة من عدة دوال لتغير واحد
غير متعلق

فلسكن $ص$ و $د$ دالتين للتغير الغير المتعلق $صه$ ولتسكن

$$صه = د(ص, د)$$

دالة لدالتى $ص$ و $د$ فيقال ان $صه$ دالة مركبة من الدالتين $ص$ و $د$

ولتفرز

(٢٩)

ولنرمز بالرمز s (v , u) المشتقة s (v , u) بالنسبة للدالة v أعني للمشتقة المأخوذة باعتبار أن v متغير غير متعلق وأن u ثابت فيكون

$$s(v + u, v, u) = s(v, v, u) - s(v, u, u) = [s(v, u, u) + s(v, v, u)] \quad (1)$$

وحرف u رمز لشيء تنعدم حينئذ تنعدم الزيادة v التي هي زيادة الدالة v ولنرمز أيضا بالرمز s (v , u) المشتقة s (v , u) بالنسبة إلى u فيوجد كذلك أن

$$s(v, v + u, u) = s(v, v, u) - s(v, v, v) = [s(v, v, u) + s(v, v, v)] \quad (2)$$

وحرف v رمز لشيء تنعدم متى انعدمت الزيادة v

فإذا عوضنا v في هذا القانون الأخير بالمقدار $v + u$ فنحصل

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(v + u, v + u, u) = s(v + u, v, u) - s(v + u, v, v) \\ s(v + u, v + u, u) = [s(v + u, v, u) + s(v + u, v, v)] \end{array} \right.$$

وحرف u رمز لما نؤول إليه كمية v متى عوض فيها v بكمية $v + u$ وهي تميل إلى الصفر حينئذ تميل كمية v إلى u

ولنفرض الآن أن v , u هما الزادتان اللتان تزداد بهما الدالتان v , u متى زاد v زيادة u فنرمز أيضا بالرمز s لزيادة التي تزداد بها الدالة v وهي

$$s(v, v + u, u) = s(v, v, u) - s(v, v, v)$$

فبإضافة المعادلتين (1) و (2) إلى بعضهما كل طرف لنظيره يحدث

$$s(v, v + u, u) + s(v, v, u) = [s(v, v, u) + s(v, v, v)] + s(v, v + u, u)$$

وبالقسم على s فنحصل

$$\frac{s(v, v + u, u)}{s(v, v, u)} + \frac{s(v, v, u)}{s(v, v, u)} = \frac{s(v, v, u) + s(v, v, v)}{s(v, v, u)} + \frac{s(v, v + u, u)}{s(v, v, u)}$$

وبالمرور إلى النهاية وملاحظة أن الكميات u , v تميل إلى الصفر يحدث

$$\frac{f(v)}{f(u)} = \frac{s(v, v, u)}{s(v, v, u)} + \frac{f(v)}{f(u)} \quad \frac{f(v)}{f(u)}$$

وبالضرب في $f(u)$ يحدث

(٤١)

وبإضافة معادلات (١) و (٤) و (٥) إلى بعضها والقسمة على فسه يحدث

$$\frac{ف}{ف} = \frac{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}$$

 وعند النهاية يكون

$$\frac{ف}{ف} = \frac{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}$$

أو

$$\frac{ف}{ف} = \frac{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}{٥(٥, د, د, ع) + ١(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩, ١٠, ١١, ١٢, ١٣, ١٤, ١٥, ١٦, ١٧, ١٨, ١٩, ٢٠, ٢١, ٢٢, ٢٣, ٢٤, ٢٥, ٢٦, ٢٧, ٢٨, ٢٩, ٣٠, ٣١, ٣٢, ٣٣, ٣٤, ٣٥, ٣٦, ٣٧, ٣٨, ٣٩, ٤٠, ٤١, ٤٢, ٤٣, ٤٤, ٤٥, ٤٦, ٤٧, ٤٨, ٤٩, ٥٠, ٥١, ٥٢, ٥٣, ٥٤, ٥٥, ٥٦, ٥٧, ٥٨, ٥٩, ٦٠, ٦١, ٦٢, ٦٣, ٦٤, ٦٥, ٦٦, ٦٧, ٦٨, ٦٩, ٧٠, ٧١, ٧٢, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٦, ٧٧, ٧٨, ٧٩, ٨٠, ٨١, ٨٢, ٨٣, ٨٤, ٨٥, ٨٦, ٨٧, ٨٨, ٨٩, ٩٠, ٩١, ٩٢, ٩٣, ٩٤, ٩٥, ٩٦, ٩٧, ٩٨, ٩٩, ١٠٠)}$$

ومن المعلوم ان هذه الطريقة يمكن تطبيقها مهما كان عدد الدوال المركبة . وحينئذ
 يمكن النطق بهذه النظرية وهي

نظرية - تفاضل أى دالة مركبة من عدة دوال لتغير واحد غير متعلق بساوى مجموع
 حواصل الضرب التى يتحصل عليها بأخذ مشتقة هذه الدالة بالنسبة لكل دالة مركبة
 معتبرة متغيرا غير متعلق فى تفاضل هذه الدالة المركبة بالنسبة للتغير الغير المتعلق
 المذكور

باعتد تطبيقات - الأولى لتكن

$$ص = د + ع + هـ + ز + ...$$

(وحروف د, ع, هـ, ز لا عدد ثابتة) فهنا المشتقات $\frac{ص}{ص}, \frac{د}{د}, \frac{ع}{ع}, \frac{هـ}{هـ}, \frac{ز}{ز}, ...$
 مساوية بالتناظر للتواب د, ع, هـ, ز, ... وحينئذ يكون
 $ص = د + ع + هـ + ز + ...$

الثانى لتكن

$$ص = د + ع + هـ + ز + ...$$

فهنا المشتقات $\frac{ص}{ص}, \frac{د}{د}, \frac{ع}{ع}, \frac{هـ}{هـ}, \frac{ز}{ز}, ...$ مساوية بالتناظر للعوامل
 د, ع, هـ, ز, ... وحينئذ يكون

$$ص = د + ع + هـ + ز + ...$$

* (٤٢) *

كما وجدناه في (١٣٢) وهذا القانون يوصل كما سيروه في (١٣٤) الى قاعدة
حساب تفاضل القوى
الثالث لتكن

$$صه = \frac{و}{٢} = و١$$

فيكون

$$فاهص = \frac{و١}{فاه} , و١ = \frac{فاهص}{فاه}$$

وحينئذ يكون

$$فاهص = و١ - فاه = و١ - و٢$$

أو

$$فاهص = \frac{و١ - و٢}{٢}$$

* (تعميمات) *

الاول $صه = و٢ - و١ = و٢ - \frac{و١}{٢} = \frac{٢و٢ - و١}{٢}$ فاهص = $\frac{٢و٢ - و١}{٢ - و١}$ فاهص

الثاني $صه = \frac{و٢}{٢ - و١}$ فاهص = $\frac{و٢(٢ - و٢)}{(٢ - و١)^٢}$ فاهص

الثالث $صه = و٢ - و١ = و٢ - \frac{و١}{٢} = \frac{٢و٢ - و١}{٢}$ فاهص = $\frac{٢و٢ - و١}{٢ - و١}$ فاهص

الرابع $صه = و٢ - و١ = و٢ - \frac{و١}{٢} = \frac{٢و٢ - و١}{٢}$ فاهص = $\frac{٢و٢ - و١}{٢ - و١}$ فاهص

الخامس $صه = و٢ - و١ = و٢ - \frac{و١}{٢} = \frac{٢و٢ - و١}{٢}$ فاهص = $\frac{٢و٢ - و١}{٢ - و١}$ فاهص

السادس $صه = \frac{١}{٢} - و١ = \frac{١ - ٢و١}{٢}$ فاهص = $\frac{١ - ٢و١}{٢ - و١}$ فاهص

فاهص = $\frac{١ - ٢و١}{٢ - و١} + \frac{و٢(١ - و١)}{(٢ - و١)^٢}$ فاهص

* (في)

(في تفاضل الدوال اللوغاريتمية)

بـ٤٤د لتكن

$$صه = لوصه$$

(اللوغاريتمات مأخوذة في جملة أساسها >)

فيكون

$$صه + ن صه = لو (صه + ن صه)$$

واذن يكون

$$ن صه = لو (صه + ن صه) - لوصه$$

أو

$$ن صه = لو (١ + \frac{ن صه}{صه})$$

واذن يكون

$$\frac{ن صه}{ن صه} = \frac{لو (١ + \frac{ن صه}{صه})}{ن صه}$$

فاذا جعل $ن صه = س$ يحدث

$$\frac{س}{س} = \frac{لو (١ + \frac{س}{صه})}{س} = لو (١ + \frac{س}{صه})$$

فاذا مال $ن صه$ الى الصفر ميل م الى ما لانهاية وقبل السكة $(١ + \frac{س}{صه})$ الى ه
(كما هو مقرر في بنود ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ من الجزء الثاني من كتاب

الكمالات التوفيقية في الاصول الجبرية) وحيثئذ يكون

$$\frac{فاسه}{فاسه} = \frac{١}{س} لو ه$$

ومن هنا يكون

$$(١) \quad فاسه \text{ أى فالوصه} = \frac{فاسه}{س} لو ه$$

فاذا كانت اللوغاريتمات مأخوذة في جملة تبير يكون $لو ه = ١$ واذن يكون

$$(٢) \quad فالوصه = \frac{فاسه}{س}$$

ويجب ان يفتبه الى انه بموجب (بـ٤٢د) يكون القانونان (١) و (٢) حقيقيين

* (٤٤) *

أيضاً لم يكن سه متغيراً غير متناهٍ وبشاهد ذلك أن التفاضل اللوغاريتمي لدالة
ليس التفاضل اللوغاريتمي الزهيرياني لهذه الدالة
بمعاد أمثلة - الأول ليكن

$$\text{سه} = \overline{\text{تو}} (\text{سه} + \sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}})$$

فيوجد أن

$$\frac{\text{فاسه} + \frac{\text{سه} \text{فاسه}}{\sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}}}{\frac{\text{فاسه}}{\sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{سه} + \sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}}$$

الثاني ليكن

$$\text{سه} = \overline{\text{تو}} \left(\frac{\text{سه}}{\sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}} \right)$$

فيقتبه في أول الأمر إلى أن

$$\overline{\text{تو}} - \text{تو} = \left(\frac{\text{سه}}{\sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}} \right) \overline{\text{تو}} - \overline{\text{تو}} \sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاسه} = \frac{\text{فاسه}}{\text{سه}} - \frac{\text{سه} \text{فاسه}}{\sqrt{\frac{\text{سه}}{\text{سه} + \text{ح}}}} = \frac{\text{فاسه}}{(\text{سه} + \text{ح})^{\frac{3}{2}}}$$

الثالث ليكن

$$\text{سه} = \overline{\text{تو}} [(\text{سه} - \text{ح}) (\text{سه} - \text{س}) (\text{سه} - \text{هـ}) \dots]$$

فهذه الكمية تساوي

$$\text{م} \overline{\text{تو}} (\text{سه} - \text{ح}) + \text{هـ} \overline{\text{تو}} (\text{سه} - \text{س}) + \text{ح} \overline{\text{تو}} (\text{سه} - \text{هـ}) + \dots$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاسه} = \frac{\text{فاسه}}{\text{سه} - \text{ح}} + \frac{\text{فاسه}}{\text{سه} - \text{س}} + \frac{\text{فاسه}}{\text{سه} - \text{هـ}} + \dots$$

* (٤٥) *

فاذا جعلنا

$$(س-س) = \dots (س-س) (س-س) (س-س) (س-س)$$

يكون

$$\frac{(س-س)}{(س-س)} = \frac{فاصه}{فاصه} = \frac{فاصه}{فاصه}$$

وننتج من ذلك أن

$$\dots + \frac{ع}{س-س} + \frac{س}{س-س} + \frac{م}{س-س} = \frac{(س-س)}{(س-س)}$$

وهذا القانون يمكن استعماله أساساً للنظرية المجزوءات المتساوية

* (في تفاضل الدوال الاسية) *

يستند لتسكن الدالة

(حرف و رمز الدالة حينما اتفق لتغير س) فبأنه لو غار بقى الطرفين في الجملة
النيرانية يحدث

$$لوصه = و لود$$

ومن هنا يحدث

$$فاصه = لود فاصه$$

واذن يكون

$$فاصه = لود فاصه$$

وعلى الخصوص اذا كان $ه = و$ ، $س = و$ يكون

$$فاهه = هه فاصه$$

وحينئذ تكون الدالة ه مساوية لاشتقها

ب٤٧ مثالان - الاول ليكن

$$س = و$$

• (٤٦) •

(حرفا و ر و د زمان لدا لئين لتغير سه) فباخذلوا غاريقي الطرفين في الجملة
النير يانية يحدث

$$\text{لوصه} = \text{و لَوو}$$

وحيثذ يكون

$$\frac{\text{فامه}}{\text{سه}} = \frac{\text{فان لَوو} + \text{و فاو}}{\text{و فاو}}$$

أو

$$\text{فامه} = \text{سه فان لَوو} + \text{و فاو}$$

أي

$$\text{فا} \left(\frac{\text{و}}{\text{و}} \right) = \text{و لَوو فان} + \text{و فاو}$$

ويمكن الوصول الى هذا الناتج بتطبيق قاعدة حساب تفاضلات الدوال المركبة
الثاني ليكن

$$\text{سه} = \frac{\text{و}}{\text{و}} \text{سه}$$

فيوجد أن

$$\text{فامه} = \frac{\text{و}}{\text{و}} \text{سه} \text{ لَوو} + \frac{\text{و}}{\text{و}} \text{سه فامه} + \frac{\text{و}}{\text{و}} \text{سه لَوو فامه}$$

• (في حساب تفاضلات الدوال الدائرية مباشرة) •

به ٤٨ دالجيب - لتكن

$$\text{سه} = \text{جاسه}$$

فاذا آل سه الى سه + ف سه تؤل الدالة سه الى سه + ف سه وحيثذ يكون .

$$\text{سه} + \text{ف سه} = \text{جا} (\text{سه} + \text{ف سه})$$

واذن يكون

$$\text{ف سه} = \text{جا} (\text{سه} + \text{ف سه}) - \text{جاسه}$$

أو

$$\text{ف سه} = ٢ \text{ جا} \frac{١}{٢} \text{ ف سه} \text{ جتا} (\text{سه} + \frac{١}{٢} \text{ ف سه})$$

وحيثذ

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا} \frac{1}{\text{ف}} \text{سمه}}{\text{ف} \frac{1}{\text{ف}} \text{سمه}} = \text{جتا} (\text{سمه} + \frac{1}{\text{ف}} \text{سمه})$$

فاذا مالت الزيادة ف سمه الى الصفر يعمل العامل الاول من الطرف الثانى الى الواحد
وعمل العامل الثانى الى جتاسمه وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا صمه}}{\text{فا صمه}} = \text{جتاسمه}$$

أى

$$\text{فا جاسم} = \text{جتاسمه فاصمه}$$

وهذا القانون حقيقى متى لم يكن سمه المتغير الغير المتعلق
بسمه جيب التمام — يمكن استخراج تفاضل جيب التمام من تفاضل الجيب لان

$$\text{جتاسمه} = \text{جا} (\frac{\pi}{2} - \text{سمه})$$

وحينئذ يكون

$$\text{فا جتاسم} = \text{جتا} (\frac{\pi}{2} - \text{سمه}) \text{فا} (\frac{\pi}{2} - \text{سمه})$$

أو

$$\text{فا جتاسمه} = - \text{جاسمه فاصمه}$$

وهذا القانون حقيقى اذا لم يكن سمه متغيرا غير متعلق
بسمه الظل — لاجل ايجاد تفاضل الظل نعم ان

$$\frac{\text{حاصمه}}{\text{جتاسمه}} = \text{فا حاصمه}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فا فا حاصمه} = \frac{\text{جتاسمه فا حاصمه} - \text{حاصمه فا حاصمه}}{\text{جتاسمه}}$$

أو

$$\text{فا فا حاصمه} = \frac{\text{جتاسمه فاصمه} + \text{حاصمه فاصمه}}{\text{جتاسمه}}$$

أو

$$\frac{\text{فا حاصمه}}{\text{جتاسمه}} = \text{فا حاصمه}$$

* (٤٨) *

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن s متغيرا غير متعلق
به $\frac{1}{s}$ ظل التمام — لاجل إيجاد تفاضل ظل التمام نعلم أن

$$\text{ظل } s = \left(\frac{\pi}{4} - s \right)$$

وحيث أن يكون

$$\frac{\text{ظل } s}{\text{ظل } s} = \frac{\pi}{4} - s$$

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن s متغيرا غير متعلق
به $\frac{1}{s}$ القاطع — لاجل حساب تفاضل القاطع نوضع

$$\frac{1}{\text{ظل } s} = \frac{1}{\pi/4 - s}$$

فيوجد أن

$$\frac{1}{\text{ظل } s} = \frac{1}{\pi/4 - s}$$

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن s هو المتغير الغير المتعلق
به $\frac{1}{s}$ قاطع التمام — لاجل إيجاد تفاضل قاطع التمام يكتب

$$\frac{1}{\text{ظل } s} = \frac{1}{\pi/4 - s}$$

فيوجد أن

$$\frac{1}{\text{ظل } s} = \frac{1}{\pi/4 - s}$$

* (في تفاضلات الدوال الدائرية العكسية) *

به $\frac{1}{s}$ قوس الجيب — لتكن

$$s = \text{قوس جيب}$$

(حرف s رمز للمتغير s) فيكون

$$s = \text{جيب}$$

واذن يكون

$$\text{ظل } s = \frac{1}{\text{جيب } s}$$

ومن هنا يكون

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

أى

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

وينبغى أخذ الجذر الداخلى فى هذا القانون بإشارة عين إشارة جتاصه
بـ $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$ قوس جيب التمام — لتكن

$$\text{صه} = \text{قوس جتا}$$

فيكون

$$\text{صه} = \text{جتاصه}$$

واذن يكون

$$\text{فاصه} = \text{جتاصه فاصه}$$

ومن هنا يوجد أن

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

أعنى أن

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

وينبغى أخذ الجذر الداخلى فى هذا القانون بإشارة عين إشارة جتاصه
بـ $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$ قوس الظل — لتكن

$$\text{صه} = \text{قوس ظا}$$

$$\text{صه} = \text{ظا صه}$$

فيكون

ومن هنا يكون

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

ومن هنا ينتج أن

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاصه}}$$

$$\text{ل} \quad \text{تفاضل} \quad \text{ل}$$

* (٥٠) *

وحيثئذ يكون

$$\frac{\text{فاقوس}}{\sqrt{v+1}} = \text{فاقوس مقلان}$$

بـ٥٧ قوس ظل القام — لتكن

$$\text{مه} = \text{قوس مقلان}$$

فيكون

$$v = \text{مقلان مه}$$

وحيثئذ يستخرج

$$\frac{\text{فاقوس}}{\sqrt{v+1}} = \text{فاقوس مه}$$

أعني ان

$$\frac{\text{فاقوس}}{\sqrt{v+1}} = \text{فاقوس مقلان مه}$$

بـ٥٨ قوس القاطع — ليكن

$$\text{مه} = \text{قوس قاطع}$$

فيكون

$$v = \text{قاطع مه}$$

وحيثئذ يوجد ان

$$\frac{\text{فاقوس}}{\sqrt{1-v^2}} = \text{فاقوس قاطع مه}$$

وموجب ان هذا المجدر الداخلى في هذا القانون باشارة من اشارة ظامه

بـ٥٩ قوس قاطع القام — وليكن

$$\text{مه} = \text{قوس قاطع}$$

$$v = \text{مقلان مه}$$

فيكون

وحيثئذ يوجد ان

$$\frac{\text{فاقوس}}{\sqrt{1-v^2}} = \text{فاقوس مقلان مه}$$

وينبغي ان هذا المجدر الداخلى في هذا القانون باشارة من اشارة مقلان مه

(٥١)

بمقد أمثلة - الاول

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2-2}{2-2}}{\frac{2-2}{2-2}} = \frac{\frac{2-2}{2-2}}{\frac{2-2}{2-2}} = \frac{2-2}{2-2} = 1$$

الثاني

$$\frac{2-2}{2-2} = \left(\frac{2-2}{2-2} \right) \frac{2-2}{2-2}$$

الثالث

$$\frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2}$$

وبهذا القانون يوجد أن

$$\frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2}$$

الرابع

$$\frac{(2-2)(2-2) + (2-2)(2-2) + (2-2)(2-2)}{(2-2)(2-2) + (2-2)(2-2)} = \frac{2-2}{2-2}$$

$$\frac{(2-2)(2-2) + (2-2)(2-2)}{(2-2)(2-2) + (2-2)(2-2)} =$$

أو

$$\frac{2-2}{2-2} + \frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2}$$

وهذا الناتج يمكن إدراكه من أول وهلة لأن

$$\frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2}$$

(تمينات)

١	ص = هـ	١ - م = هـ	١ - م = هـ
٢	ص = هـ	ص = هـ	ص = هـ
٣	ص = هـ	ص = هـ	ص = هـ

* (or) *

فأصبه $\frac{1}{2}$ حاسبه (جانبه $\frac{1}{2}$ حاسبه + $\frac{1}{2}$ حاسبه) فأصبه $\frac{1}{2}$ حاسبه

قوس حاسه = صه
قوس حاسه = فاصه = $\frac{1}{2}$

۶. $\frac{1}{h} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \dots + \frac{1}{h_n}$ فاصله

v مہمہ لوچناسہ فاصہ = فاسہ فاسہ فاسہ

۸ صه = لَوَظاعه

٩ ص = خالوتہ فاصم = $\frac{1}{2}$ ج = الخوتہ فاصمہ

١٠. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ فاصلة $x^{-2} = x^{-2-1} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ فاصلة

$$\frac{ص}{ص+۱} = \frac{ف}{ف+۱}$$

۱۲ صنف = قوس جتا جتا صنف + ۵ جتا صنف
 فاصله = $\frac{5-27}{5 \text{ جتا صنف} + 27}$

$$13. \text{مسئله فرض نما} \left(\sqrt{m^2 - n^2 + 1} \right) \quad \frac{\text{فاصله}}{(m^2 + 1)^2} = \text{فاصله}$$

$$\frac{f(s)}{f(s) + f(1-s)} = f \quad \text{و} \quad \frac{f(s)}{f(s) - f(1-s)} = f \quad 1$$

$$10. \text{مس} = \frac{s + \text{مس}}{h} \quad \text{فاص} = \frac{h \text{ فاص}}{(s + \text{مس}) + h}$$

۱۶ صه=لوقوس جتا۷۱-۱۲

$$17 \text{ مبدؤ } \frac{1 - \text{خاتمه}}{1 + \text{خاتمه}} = \text{خاتمه} \frac{\text{خاتمه} + \text{خاتمه}}{\text{خاتمه}}$$

$$\frac{\text{فاصله}^2 (5+2) + 5^2}{r(5+1)} = \text{فاصله} \quad \frac{\text{فاصله} (5+2)}{r(5+1)} = 18$$

* (٥٣) *

$$١٩ \text{ صه} = \text{قوس ظا} (٧ \frac{\text{قاسه} - \text{قاسه}}{\text{قاسه}}) \quad \text{قاسه} = \frac{\sqrt{\text{قاسه}^2 - \text{قاسه}^2}}{\text{قاسه}} \quad \text{قاسه} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

$$٢٠ \text{ صه} = \text{قوس ظا} (٧ \frac{\text{قاسه} - \text{قاسه}}{\text{قاسه}}) \quad \text{قاسه} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} \quad \text{قاسه} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

* (في تفاضلات الدوال الغير المحولة المعلومة بمعادلة واحدة) *

به الحد لنفرض دالة صه مرتبطة بمتغيرها بواسطة معادلة غير محولة ولتكن

$$\text{صه} = (\text{صه} \text{ و صه})$$

التي طرفها الاول دالة معلومة لتغيري صه و صه

فحينئذ ان صه دالة لتغيري صه فيمكن اعتبار صه و صه دالة مركبة وحينئذ ان هذه الدالة المركبة معدومة على الدوام فربما يكون تفاضلها وهو

$$\frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} + \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

مساو بالصفر وحينئذ لتوجد المعادلة

$$\frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} + \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = ٠$$

ومن هنا يحدث

$$\frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} \quad \text{و يكون} \quad \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

فيشاهد ان مشتقة أى دالة غير محولة معلومة بمعادلة واحدة تحصل بقسمة مشتقة الطرف الاول لهذه المعادلة بالنسبة للتغير الغير المتعلق على مشتقته بالنسبة للدالة معتبرة متغيرا غير متعلق وأخذ الناتج بإشارة مخالفة لاشارة به الحد أمثلة - الاول ليكن

$$\text{صه} = (\text{صه} \text{ و صه}) \quad \text{صه} = \text{قوس ظا} (٧ \frac{\text{قاسه} - \text{قاسه}}{\text{قاسه}}) \quad \text{قاسه} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

فهنا

$$\frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}} = \frac{\text{قاسه}}{\text{قاسه}}$$

(٥٤)

واذن يكون

$$\frac{\text{فاصة}^2}{\text{فاصة}} = \frac{\text{فاصة}^2}{\text{فاصة}}$$

وفي هذه الحالة يمكن حل المعادلة بالنسبة للدالة صه ويوجد

$$\text{صه} = \frac{\sqrt{\text{فاصة}^2 - \text{فاصة}^2}}{\text{فاصة}}$$

والجذر الداخل في هذا القانون يجب أخذه بـ إشارة + وبإشارة - فاذا وضع مقدار صه هذا في القانون المتقدم فان هذا القانون يقول الى

$$\frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}} = \frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}}$$

ويمكن ان يتحصل على هذا الناتج مباشرة بأخذ تفاضل مقدار صه المتقدم الثاني لتسكن المعادلة

$$\text{د}(\text{سه} + \text{صه}) = (\text{سه} + \text{صه})^2 - \text{فاصة}^2 = (\text{سه} - \text{صه})^2 = 0$$

التي تدل على منحن يسمى لمنسكات برنولي متى اعتبر سه د صه احدائيتين عماديين فهنا

$$\frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}} = \text{د}(\text{سه} + \text{صه}) - (\text{سه} + \text{صه})^2 = \frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}} \text{ د} \text{ و } \text{د}(\text{سه} + \text{صه}) + \text{د}^2 \text{ صه}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}} = \frac{\text{سه}(\text{سه} + \text{صه} - \text{د}^2)}{\text{سه}(\text{سه} + \text{صه} + \text{د}^2)}$$

الثالث لتسكن المعادلة

$$\text{سه}^3 + \text{صه}^3 - \text{سه}^2 \text{ د} - \text{سه} \text{ د}^2 = 0$$

فيوجد أن

$$\frac{\text{فاصة}}{\text{فاصة}} = \frac{\text{د}^2 \text{ صه} - \text{سه}^2}{\text{سه}^2 - \text{د}^2 \text{ صه}}$$

الرابع لتسكن المعادلة

$$\text{د}^2 \text{ صه} + \text{سه} = \frac{\text{سه}^2}{\text{د}^2} = \text{سه} \text{ صه}$$

فيوجد

فيوجد أن

$$\frac{\text{صه} - \text{رجتا سنه} + \text{صه}}{\text{رجتا سنه} + \text{صه} - \text{صه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}$$

(في حذف الثوابت الاختيارية)

بـ ٦٣ د لتعتبر معادلة ولتكن

$$(١) \quad \text{صه} = (\text{سنه} + \text{صه} + \text{و ث})$$

رابطه لا تغير بين سنه و صه والثابت الاختياري ث فبأخذ تفاضل طرفي هذه المعادلة يحدث

$$(٢) \quad \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} + \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$$

فاذا حذفنا الثابت ث من المعادلتين (١) و (٢) نتج معادلة مثل

$$(٣) \quad \text{صه} = \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right)$$

واقعة بين المتغير الغير المتعلق سنه والدالة صه ومشتقها وهي $\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}$

وهذه المعادلة (٣) التي نتج بأخذ تفاضل معادلة مشتقة على ثابت اختياري يقال لها معادلة تفاضلية وبالنسبة لهذه المعادلة التفاضلية يطلق أحيانا على المعادلة (١) اسم معادلة أصلية

فاذا فرض أن المتغيرين سنه و صه دالان على احدائيهين مستقيمين وان الثابت ث يأخذ مقادير لا حصر لعدد ها فان المعادلة (١) تدل على عدة منحنيات من نوع واحد وتكون المعادلة (٢) دالة على خاصية للاس المشترك لجميع المنحنيات التي من النوع المذكور

مثلا لتكن المعادلة

$$\text{صه} = ٢ \text{ سنه} \\ \text{صه فاصه} = \text{رج فاصه}$$

فتم يوجد أن

* (٥٦) *

وبحذف الثابت > توجد هذه المعادلة وهي

$$\text{صه} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = ٢$$

ومن هذه المعادلة يتضح انه في جميع القطاعات المكافئة المتعددة في المحور والرأس يكون تحت المماس ضعف أفقي نقطة التماس مهما كانت الكمية الثابتة > ٢ ولناخذ المعادلة

$$\text{صه} = ٢ = ٤ + \text{صه} + ٢$$

التي تدل على تتابع قطاعات مكافئة متعددة في المحور والبورة فهذه المعادلة توصل بحذف الثابت > الى المعادلة

$$\text{صه} \left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \right) + ٢ = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} - \text{صه} = ٠$$

ومن هذه المعادلة يوجد أن

$$\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{صه} + \sqrt{\text{صه}^2 + \text{صه}}}{\text{صه}}$$

أو

$$\text{صه} + \text{صه} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \sqrt{\text{صه}^2 + \text{صه}}$$

وبالتأمل في شكل ه يرى ان صه = ح د و صه = ح ح د و $\sqrt{\text{صه}^2 + \text{صه}} = ب ب م$ فاذن يكون

$$\text{صه} = ب ب م$$

وحيث ان

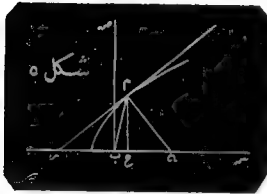
$$\text{صه} = ب ب م$$

فيكون

$$\text{صه} = ب ب م = ب ب م$$

أعني انه في كل قطع مكافئ تكون البورة مساوية البعد عن نقطتي تقابل المماس والهودي بالمحور وعن نقطة التماس

*) (٥٦)



(٥٧)

(في تفاضل الدوال الغير المحولة المألوفة بعدة معادلات)

بـ ١٤ دولة تعتبر الآن دالتين صه د ع لتغيروا واحد وليكن صه غير محولتين معلومتين
بمادتين مثل

$$\begin{aligned} & \text{د} \quad \text{صه} \text{ و } \text{صه} \text{ د ع} = \text{صه} \\ & \text{د} \quad \text{صه} \text{ و } \text{صه} \text{ د ع} = \text{صه} \end{aligned}$$

ولنفرض ان المطلوب إيجاد التفاضلين فاصه و فاع بدون حل هاتين المعادلتين
فلذلك يقال حيث ان صه د ع دالتان لتغير صه فتكون الدالتان د (صه و صه د ع)
و د (صه د صه د ع) دالتين مركبتين وحيث ان هاتين الدالتين معدومتان
فيكون تفاضلاهما معدومين كذلك وحينئذ يكون

$$\begin{aligned} & \text{د} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فا}} + \frac{\text{فا}}{\text{فا}} + \frac{\text{فا}}{\text{فا}} = \text{فا} \\ & \text{د} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فا}} + \frac{\text{فا}}{\text{فا}} + \frac{\text{فا}}{\text{فا}} = \text{فا} \end{aligned}$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج مقداراً فاصه د فاع وهما

$$\begin{aligned} & \text{د} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فا}} = \frac{\text{فا}}{\text{فا}} - \frac{\text{فا}}{\text{فا}} \\ & \text{د} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فا}} = \frac{\text{فا}}{\text{فا}} - \frac{\text{فا}}{\text{فا}} \\ & \text{د} \quad \frac{\text{فا}}{\text{فا}} = \frac{\text{فا}}{\text{فا}} - \frac{\text{فا}}{\text{فا}} \end{aligned}$$

بـ ١٥ مثال — لنفرض المعادلتين

$$\begin{aligned} & \text{د} \quad \text{صه} + \text{صه} + \text{ع} = \text{صه} \\ & \text{د} \quad \text{صه} + \text{صه} + \text{ع} = \text{صه} \end{aligned}$$

ل تفاضلا

※(中入)※

التي فيها $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$ رموز لأعداد ثابتة معلومة فيوجد أن

سه فاسه + صه فاصه + ع فاع = .

ج فاسه + و فاصه + ه فاع = .

ومن هاتين المعادلتين يستخرج القانون

$$\frac{\text{فاع}}{\text{و سه - د سه}} = \frac{\text{فاصه}}{\text{د ع - ه سه}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{ه سه - و ع}}$$

الذي به يعلم التفاضلان فاصه , فاع للدالتين صه , ع

٦٦٦ وبهذه الكيفية تجري العمل في الحالة العمومية التي تعتبرها دوال ψ, ψ, ψ

... عددہا و انتغیر واحد غیر متعلق ولیکن سے معلومۃ بمعادلات مثل

$$, \quad \bullet = (\dots, u, c, m, s);$$

$$= (\dots, \dots, \dots)$$

$$\bullet = (\dots, \mathfrak{U}, \mathfrak{C}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

• • • • •

عدها و رابطة لهذه الدوال بتغيرها الغير المتعلق لانه حيث كانت الدوال

و د ي و د ي . . . مركبتين مقدارهما معدومة كما في الحالتين المتقدمتين فتكون

تفاضلاتها مع دومة وحسنًا يكون

$$, \dots = \dots + \frac{\text{فاس}}{\text{فان}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاع}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فامه}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاسه}}$$

$$, \dots = \dots + \frac{\frac{1}{a}}{a} + \frac{\frac{1}{a}}{a} + \frac{\frac{1}{a}}{a} + \frac{\frac{1}{a}}{a} + \dots$$

$$, \dots + \frac{\frac{f_1}{f_1}}{f_1} + \frac{\frac{f_2}{f_2}}{f_2} + \frac{\frac{f_3}{f_3}}{f_3} + \frac{\frac{f_4}{f_4}}{f_4}$$

[illegible]

وهذه المعادلات التي عددها ١٠ تتعين مقادير تفاضلات الدوال v, w, \dots

التي عددها n ، ويتحصل على هذه المعادلات بأخذ تفاضل المعادلات المفروضة أعني

بتسوية تقاضيات الأطراف الأولى لهذه المعادلات المفروضة بصفر



الفصل الثالث

(في التفاضلات برتب مختلفة للدوال ذات المتغير الواحد)

(في المشتقات برتب مختلفة)

بشـد لتكن \mathcal{D} دالة لمتغير x ولتكن \mathcal{D}^2 مشتقتها فرمز الرمز \mathcal{D}^3 مشتقة \mathcal{D}^2 \mathcal{D} وبالرمز \mathcal{D}^4 مشتقة \mathcal{D}^3 \mathcal{D} وهكذا وبهذه الكيفية يتكون تتابع الدوال وهو

$$\mathcal{D} \text{ (س) } \mathcal{D}^2 \text{ (س) } \mathcal{D}^3 \text{ (س) } \mathcal{D}^4 \text{ (س) } \dots$$

ويكون عدد هذه الدوال لانها ثانيا لم تكن \mathcal{D} دالة جذرية وصحيحة والدالة \mathcal{D}^3 التي تشغل الرتبة النونية في التتابع المتقدم يقال لها المشتقة برتبة ٥ للدالة \mathcal{D} (س) أو المشتقة النونية للدالة \mathcal{D} (س)

(في التفاضلات برتب مختلفة)

بشـد قد علمنا (بـ١٤د) ان تفاضل أى دالة مثل

$$(1) \quad \mathcal{D}^2 = \mathcal{D} \text{ (س)}$$

يكون مبيغا بالقانون

$$(2) \quad \mathcal{D}^2 = \mathcal{D} \text{ (س) } \mathcal{D}^2 \text{ (س)}$$

الذي فيه \mathcal{D} أو \mathcal{D}^2 رمز لزيادة اختيارية تعضى للمتغير الغير المتعلق والى الان لم نفرض أى فرض كان على هذه الزيادة الا اننا نفرض هنا انها ثابتة أعنى غير متعلقة بالمتغير x

فاذا اخذنا تفاضل معادلة (٢) بفرض ان الكمية \mathcal{D}^2 ثابتة نجد ان

$$\mathcal{D}^2 \mathcal{D}^2 = \mathcal{D}^2 \text{ (س) } \mathcal{D}^2 \text{ (س) } \mathcal{D}^2 \text{ (س) } \mathcal{D}^2 \text{ (س)}$$

ويقال للتفاضل فاقامه التفاضل الثاني للدالة مع أو التفاضل برتبة ثانية لهذه

$$F_{\text{اصح}} = F_{\text{م}}(s) F_{\text{اصح}}$$

وفاصمه = فاصمه فاصه (س) = فاصمه = [س (س) فاصمه] = س (س) فاصمه

$$F_{\text{اصف}} = F_{\text{اصف}}^{\text{اصف}}(F_{\text{اصف}})$$

\dots , \dots , \dots

(۳) $\frac{1}{x^2} = x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$$(4) \quad \frac{a^2}{a^3} = (a)^{-1}$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$$

۶۹

* (٦١) *

بـ ٦٩ د التفاضلات برتب مختلفة لبعض دوال بسيطة — أولاً لتكن

$$صه = سه$$

فيوجد أن

$$فاصه = م سه^1 \text{ و } فاصه^2 = م(١-م) سه^2, \dots,$$

$$فاصه^3 = م(١-م) \dots (١-م+١) سه^3$$

وثانياً لتكن

$$صه = لسه$$

فيوجد أن

$$فاصه = سه^1 = سه^1 \text{ و } فاصه^2 = سه^2 \dots$$

$$فاصه^3 = سه^3 (١-١) \dots ٢ \times ٢ \times ١ \times (١-١) = سه^3$$

وثالثاً لتكن

$$صه = سه$$

(حرف د رمز لعدد ثابت) فيوجد أن

$$فاصه = سه^د لود \text{ و } فاصه^2 = سه^2 لود \dots \text{ و } فاصه^3 = سه^3 لود$$

وفي الحالة التي يكون فيها د = هـ يكون

$$فاصه = سه = سه$$

ورابعاً لتكن

$$صه = جا(سه + د)$$

(حرف د رمز لعدد ثابت) فيوجد أن

س و س فاذا انعدمت الدالة s (س و ب) مهما كان س بمقدار مخصوص
كبيرة ب ولكن ب اقول ان المشتقة s (س و ب) تنعدم أيضا مهما كان س
المقدار $s = 0$

انه اذا كان المقداران س و س+ ح محصورين بين س و س يكون

$$s(s + \text{ح}) - s(s) = (s + \text{ح}) - s = \text{ح}$$

لـ صغيرة تقبل الى الصفر حينما تقبل الزيادة ح اليه وحيث ان الطرف الاول يؤل
الى الصفر متى جعل $s = 0$ على حسب الفرض فيجب ان يؤل الطرف الثاني كذلك
الى الصفر متى جعل $s = 0$ وانه مهما كان س و ح يكون

$$0 = \text{ح} [s + (s + \text{ح})] = \text{ح} \cdot 0$$

و ما يؤل اليه الكمية لـ حينما نعوض فيها الكمية الثابتة ب بالمقدار ب وهي تنعدم
حينما تنعدم الزيادة ح

فاذا قممت هذه المعادلة على ح يحدث

$$0 = s + (s + \text{ح}) = 2s + \text{ح}$$

فاذا جعل $\text{ح} = 0$ في هذه المعادلة الاخيرة يحدث

$$0 = (s + \text{ح})$$

وهو ما أردنا اثباته

بـ ٧٤ ولنفرض الآن دالة لتغير س ولكن س ونفرض ان هذه الدالة ومشتقاتها
المعتبرة مستمرة بمقادير س المحصورة بين س و س فموجب تعريف المشتقات يكون

$$(1) \quad \frac{f(s)}{f(s)} = \frac{f(s)}{f(s)} + 1$$

(حرف لـ رمز الكمية تنعدم حينما ينعدم فـ س) فينتضح من هذا القانون انه بدلا عن

اجراء العملية $\frac{f(s)}{f(s)}$ على الدالة س يمكن اجراء العملية $\frac{f(s)}{f(s)}$ على هذه الدالة بشرط
ان يضاف لـ نتائج كـ بـ تنعدم حينما ينعدم فـ س فاذا طبقنا هذا القانون على الدالة
 $\frac{f(s)}{f(s)}$ يحدث

•(٦٤)•

$$\frac{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\frac{\text{فا}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} + \frac{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\text{ل}}{\text{ف}} + \frac{\frac{\text{فا}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\text{ل}}{\text{ف}} + \frac{\text{فا}}{\text{ف}}$$

(ل) رمز الكمية تنعدم حينما ينعدم (ف) وحيث ان الكمية لا تنعدم مهما كان (ف) حينما ينعدم (ف) فبموجب القاعدة المتقدمة تنعدم المشتقة $\frac{\text{فا}}{\text{ف}}$ أيضا حينما ينعدم (ف) وحيث ان (ف) يساوى خارج قسمة (ف) على (ف) على (ف) فيمكن ان نكتب

$$(٢) \quad \frac{\text{ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{فا}}{\text{ف}} + \frac{\text{ل}}{\text{ف}}$$

(ل) كمية تنعدم حينما ينعدم (ف)

وانطبق القاعدة المينة بالقانون (١) على الدالة $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ فنجد ان

$$\frac{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\frac{\text{فا}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} + \frac{\frac{\text{ل}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\text{ل}}{\text{ف}} + \frac{\frac{\text{فا}}{\text{ف}}}{\frac{\text{ف}}{\text{ف}}} = \frac{\text{ل}}{\text{ف}} + \frac{\text{فا}}{\text{ف}}$$

(ل) كمية تنعدم حينما ينعدم (ف) وحيث ان (ل) تنعدم كذلك حينما ينعدم (ف)

فنعدم المشتقة $\frac{\text{فا}}{\text{ف}}$ كذلك حينما ينعدم (ف) ويكون

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{فا}}{\text{ف}} + \frac{\text{ل}}{\text{ف}}$$

(ل) كمية صغيرة تنعدم حينما ينعدم (ف)

ويمكن الاسقرار بهذه الكيفية الى ما لانهاية بحيث اذا فرضنا ان المشتقات التي عددها n للدالة (ف) مستقرة يوجد على العموم ان

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{فا}}{\text{ف}} + \frac{\text{ل}}{\text{ف}}$$

(حرف ل) رمز الكمية تنعدم حينما ينعدم (ف) وحيث ان يكون

نما

(٦٠)

$$\frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}} = \frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}}$$

فيتضح من هذا القانون ان المشتقة مرتبة $\frac{1}{2}$ لاى دالة المتغير صه هي نهاية نسبة الفرق الزمنى لهذه الدالة الى القوة الزمنية لزيادة المتغير ويمكن ايضا أن يكتب

$$\frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}} = \frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}} + \text{نهاية صه}$$

وحيث ان $\text{نهاية صه} = \text{فاصه}$ فلا يكون القيم الاول من هذا المقدار الجبرى الا فاصه وحيث أن يكون

$$\frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}} = \text{فاصه} + \text{نهاية صه}$$

وحيث أن يكون

$$\frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}} + 1 = \frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}}$$

وحيث اذا كانت المشتقة $\frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}}$ مستمرة يكون

$$1 = \frac{\text{نهاية صه}}{\text{نهاية فاصه}}$$

في بيان المشتقات التي برتب مختلفة التي يتوصل اليها باعتبار دالة ذات عدة متغيرات

بـ ٧٣ نظرية — اذا فرضت دالة مثل

$$\text{صه} = \text{صه}(\text{و}, \text{و})$$

ذات متغيرين $\text{و}, \text{و}$ ومشتقتها بالنسبة الى و والى و هما $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}$ و $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}$

بالتناظر أقول ان مشتقة الدالة $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}$ بالنسبة الى و تساوي مشتقة الدالة $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}$

تفاضل ل

بالنسبة الى v أى ان

$$\frac{\frac{فا}{فاو}}{\frac{فاو}{فاو}} = \frac{\frac{فاو}{فاو}}{\frac{فاو}{فاو}}$$

بشرط أن تكون الدوال $فاو$ و $\frac{فاو}{فاو}$ دوال مستمرة لتغيرى v و
لأنه اذا تغير v زيادة مما $فاو$ وأبقى المتغير v ثابتا يحدث

$$(1) \quad s(v + \Delta v, v) - s(v, v) = \left(\frac{فاو}{فاو} + 1 \right) \Delta v$$

وحرف $ل$ الداخلى فى هذا القانون رمز الدالة لتغيرى v و ولزيادة $فاو$ وهذه
الدالة تميل الى الصفر مهما كان المقدار الذى يعطى للمتغير v حيثما تميل الزيادة $فاو$
اليه

فاذا آلى المتغير v الى $v + \Delta v$ فى هذا القانون يؤل طرفه الاول الى
 $s(v + \Delta v, v + \Delta v) - s(v, v + \Delta v)$

وفى الطرف الثانى يؤل الدالة $\frac{فاو}{فاو}$ الى

$$\frac{فاو}{فاو} + \frac{فاو}{فاو} \Delta v + \Delta v$$

وحرف $ل$ رمز الكمية تنعدم حيثما تنعدم الزيادة $فاو$ وتأخذ الدالة $ل$ مقدارا جديدا
بالصورة $ل + 1$ و $(ل + 1) \Delta v$ كقيمة نهايتها $\frac{فاو}{فاو}$ حيثما تميل الزيادة $فاو$ الى الصفر
وحيث يجب أن تنعدم هذا المقدار الجديد مهما كانت الزيادة $فاو$ متى انعدمت
الزيادة $فاو$ فيلزم أن تنعدم الكمية $ل$ متى انعدمت الزيادة $فاو$ وحيث قد يكون

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &s(v + \Delta v, v + \Delta v) - s(v, v + \Delta v) \\ &= \left(\frac{فاو}{فاو} + \frac{فاو}{فاو} \Delta v + \Delta v \right) \Delta v + (ل + 1) \Delta v \end{aligned} \right.$$

فاذا طرحنا المعادلة الاولى من الثانية وقف معنا طرفى المعادلة المتحصلة على $فاو$ و يحدث

(١٧)

$$(٢) \left\{ \frac{z(v+u, v+u) - z(v+u, v) + z(v, v)}{v+u} \right.$$

$$\left. \frac{\frac{v+u}{v} + \frac{v+u}{v}}{\frac{v+u}{v}} = \right.$$

فيشاهدان نهاية الطرف الثاني وبالتبعية نهاية الطرف الاول تكون هي $\frac{v+u}{v}$

متى مالت الزيادةتان v, u الى الصفر
لكن اذا غير المتغير u اولافى الدالة $z(v, u)$ ثم غير المتغير v بشاهد كذلك ان

$\frac{v+u}{v}$ تكون هي نهاية الطرف الاول اعادلة (٢) متى مالت الزيادةتان v, u الى الصفر وحيث يجب ان تكون هاتان النهايتان متساويتين فيكون

$$\frac{\frac{v+u}{v}}{\frac{v+u}{v}} = \frac{\frac{v+u}{v}}{\frac{v+u}{v}}$$

وهو المطلوب

به ٧٤ النظرية المهمة المقدمة تحدثنا واسطة سهلة لبيان المشتقات بكل رتبة
التي يتوصل اليها باعتبار الدالة ذات عدة متغيرات
فلتكن

(١) $z(v, u, w, \dots)$ عدد هـ $z(v, u, w, \dots)$ مشتقات التي برتبة اولى
المهمة البعد ما خوزة بالنسبة للمتغيرات v, u, w, \dots تبين على التناظر
هكذا

$$(٢) \quad \frac{v+u}{v}, \frac{v+u}{u}, \frac{v+u}{w}, \dots$$

كذلك ناه آتقوا المشتقات التي برتبة ثانية هي التي يحصل عليها باخذ مشتقات المشتقات
التي برتبة اولى المينة بالتتابع (٢) بالنسبة للمتغيرات المختلفة لكن حيث انه يمكن
بموجب النظرية المقدمة نصير رتبة المتحليتين اللتين غير يان على التوالي فلا يفصل

* (٦٨) *

على مشتقات متغيرة برتبة ثانية الا بقدر $\frac{m(m+1)}{2}$ اعني بقدر عدد التوافيق التامة
(المكررة المحروف) محروف عددها m متنى متنى وهذه المشتقات التي برتبة ثانية
يستدل علم بالرموز

$$(٢) \quad \dots, \frac{f_{اصه}}{f_{او فاع}}, \frac{f_{اصه}}{f_{او فاو}}, \frac{f_{اصه}}{f_{او}}$$

التي فيها

$$\dots, \frac{f_{اصه}}{f_{او}} = \frac{f_{اصه}}{f_{او}} = \frac{f_{اصه}}{f_{او فاو}} = \frac{f_{اصه}}{f_{او فاع}}, \frac{f_{اصه}}{f_{او}} = \frac{f_{اصه}}{f_{او}}$$

و يتصل على المشتقات برتبة ثالثة لدالة صه ياخذ مشتقات المشتقات برتبة ثانية
المبينة بالتتابع (٢) بالنسبة للتغيرات المختلفة وهلم جرا
ويشاهد عموما ان عدد المشتقات التي برتبة m يساوي عدد التوافيق التامة لمحروف
عددها m فونا فونا اعني يساوي

$$\frac{m(m+1)(2+m) \dots (1+m-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}$$

لان العمليات التي عددها m التي يلزم اجراؤها لاجل تكوين احدى هذه المشتقات
يمكن اجراؤها بموجب نظرية 73 بترتيب حينها: تنق ويكون المقدار المجبري العمومي
للمشتقات برتبة m هكذا

$$\frac{f_{اصه}}{f_{او فاع} \dots}$$

وحروف $ل, ر, ط, \dots$ رموز لاعداد صحيحة موجبة أو معدومة مجموعها
يساوي $ص$ والاس الأخويه تفاضل احدى المتغيرات في المقام يدل على عدد عمليات
التفاضل التي تجري بالنسبة لهذا المتغير

* (في حساب التفاضلات برتب مختلفة لدالة مركبة من عدة دوال) *

$$ص = (٧, ٥, ٤, ٣, ٢, ١) \dots$$

دالة

والتي مركبة من دوال u, v, x, y, \dots لتغير واحد z عددها m فيجب
قاعدة ٢٤ يكون

$$(1) \quad \text{فامص} = \frac{\text{فامص}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام}}{\text{فاو}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فاع}} + \dots$$

وحيث ان كل حد من الطرف الثاني حاصل ضرب عاملين فيأخذ تفاضلي طرقي هذا
القانون يحدث

$$\text{فامص} = \text{فا} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فام}} \right) + \text{فام} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاو}} \right) + \text{فاو} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاع}} \right) + \dots$$

$$+ \frac{\text{فامص}}{\text{فام}} \text{فام}^2 + \frac{\text{فامص}}{\text{فاو}} \text{فام}^2 + \frac{\text{فامص}}{\text{فاع}} \text{فام}^2 + \dots$$

فاذا طبقت القاعدة الميمنة بقانون (١) على الدوال $\frac{\text{فامص}}{\text{فام}}, \frac{\text{فامص}}{\text{فاو}}, \frac{\text{فامص}}{\text{فاع}}, \dots$
يحدث

$$, \quad \text{فا} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فام}} \right) = \frac{\text{فامص}}{\text{فام}^2} + \text{فام} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فام فام}} \right) + \text{فاو} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فام فاع}} \right) + \dots$$

$$, \quad \text{فا} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاو}} \right) = \frac{\text{فامص}}{\text{فام فاو}} + \text{فام} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاو فاو}} \right) + \text{فاو} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاو فاع}} \right) + \dots$$

$$, \quad \text{فا} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاع}} \right) = \frac{\text{فامص}}{\text{فام فاع}} + \text{فام} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاو فاع}} \right) + \text{فاو} \left(\frac{\text{فامص}}{\text{فاع فاع}} \right) + \dots$$

.....

وحينئذ يؤخذ مقدار فامص الى

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \dots + \frac{\text{فامص}}{\text{فام فام}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فام فاو}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فام فاع}} \\ & \left(\dots + \frac{\text{فامص}}{\text{فاو فاع}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فاو فاو}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فاو فام}} \right) + \\ & \left(\dots + \frac{\text{فامص}}{\text{فاع فاع}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فاع فاو}} + \frac{\text{فامص}}{\text{فاع فام}} \right) + \end{aligned} \right.$$

(٧٠)

وبهذه الكيفية يتوصل بالتوالي على التفاضلات فأصه و $\text{فأصه} \dots$ به الحالة التي تكون فيها الدوال المركبة خطية - اذا كانت جميع الدوال $\text{فأصه} \dots$ بالصورة $\text{فأصه} + \text{فأصه}$ التي فيها $\text{فأصه} > \text{فأصه}$ و فأصه لكتبتين ثابتتين يكون

$$\text{فأصه} = \text{فأصه} \quad \text{و} \quad \text{فأصه} = \text{فأصه} \quad \text{و} \quad \text{فأصه} = \text{فأصه} \dots$$

ويؤلف قانون (٢) الى

$$\begin{aligned} \text{فأصه} &= \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \dots \\ &+ \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \dots \\ &\text{ومقدار فأصه هذا يمكن الدلالة عليه دلالة بيانية بالقانون} \end{aligned}$$

$$\text{فأصه}^{(2)} = \left(\text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \dots \right) \text{فأصه}^{(2)}$$

وذلك بملاحظة انه بعد تكوين مربع فأصه تعوض العوامل

$$\left(\frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} \right)^2 \quad \text{و} \quad \left(\frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} \right) \left(\frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} \right) \quad \text{و} \quad \dots$$

على التناظر بالاشتقاق

$$\text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} \quad \text{و} \quad \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} \quad \text{و} \quad \dots$$

وهذه القاعدة عمومية فأقول انه مهما كان فأصه يكون

$$\text{فأصه}^{(2)} = \left(\text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \text{فأصه} \frac{\text{فأصه}}{\text{فأصه}} + \dots \right) \text{فأصه}^{(2)}$$

بشرط انه بعد تكوين القوة النونية للتفاضل فأصه تعوض العوامل التي بالصورة

(٧١)

$$\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ل}}}{\text{فاو}^{\text{ل}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ع}}}{\text{فاو}^{\text{ع}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ط}}}{\text{فاو}^{\text{ط}}}\right)\dots$$

الداخلية في كل حد بالمشتقات المناظرة لها وهي

$$\frac{\text{فا}^{\text{ل}} + \text{فا}^{\text{ع}} + \text{فا}^{\text{ط}} + \dots + \text{فا}^{\text{ص}}}{\text{فاو}^{\text{ل}} \text{فاو}^{\text{ع}} \text{فاو}^{\text{ط}} \dots \text{فاو}^{\text{ص}}}$$

لان القانون اليباني المتقدم يحدث المقدار الحقيقي لانفاضل فاصه متى كان $\text{فا} = 1$ وحينئذ يكفي لاجل بيان صحته أن يثبت على أنه اذا كان حقيقيا بالنسبة لرتبة هـ يكون حقيقيا بالنسبة لرتبة $\text{هـ} + 1$ وحينئذ نفرض ان القانون حقيقى بالنسبة للدليل هـ وليكن

$$\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ل}}}{\text{فاو}^{\text{ل}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ع}}}{\text{فاو}^{\text{ع}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ط}}}{\text{فاو}^{\text{ط}}}\right)\dots \text{فاو}^{\text{ل}} \text{فاو}^{\text{ع}} \text{فاو}^{\text{ط}} \dots$$

حدا من تحليل القوة النونية للتفاضل فاصه فيكون الحد المناظر له من مقدار فاصه هو

$$\frac{\text{فا}^{\text{ل}} + \text{فا}^{\text{ع}} + \text{فا}^{\text{ط}} + \dots + \text{فا}^{\text{ص}}}{\text{فاو}^{\text{ل}} \text{فاو}^{\text{ع}} \text{فاو}^{\text{ط}} \dots \text{فاو}^{\text{ص}}}$$

ومن المعلوم انه لاجل ايجاد $\text{فا}^{\text{ل}} + \text{فا}^{\text{ع}} + \text{فا}^{\text{ط}} + \dots + \text{فا}^{\text{ص}}$ يلزم اخذ تفاضل فاصه ويحصل من الحد الذى كتبناه هذا المجموع وهو

$$\left(\frac{\text{فا}^{\text{ل}} + \text{فا}^{\text{ع}} + \text{فا}^{\text{ط}} + \dots + \text{فا}^{\text{ص}}}{\text{فاو}^{\text{ل}} + \text{فاو}^{\text{ع}} + \text{فاو}^{\text{ط}} + \dots + \text{فاو}^{\text{ص}}} + \frac{\text{فاو}^{\text{ل}} + \text{فاو}^{\text{ع}} + \text{فاو}^{\text{ط}} + \dots + \text{فاو}^{\text{ص}}}{\text{فاو}^{\text{ل}} + \text{فاو}^{\text{ع}} + \text{فاو}^{\text{ط}} + \dots + \text{فاو}^{\text{ص}}}\right) \dots$$

حيث ان فاصه د فاو د فاصه د ... ثوابت وبموجب اصطلاحنا يمكن الدلالة على هذا الناتج هكذا

$$\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ل}}}{\text{فاو}^{\text{ل}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ع}}}{\text{فاو}^{\text{ع}}}\right)\left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ط}}}{\text{فاو}^{\text{ط}}}\right)\dots \text{فاو}^{\text{ل}} \text{فاو}^{\text{ع}} \text{فاو}^{\text{ط}} \dots$$

$$\times \left(\frac{\text{فاصه}^{\text{ل}}}{\text{فاو}^{\text{ل}}} + \frac{\text{فاصه}^{\text{ع}}}{\text{فاو}^{\text{ع}}} + \frac{\text{فاصه}^{\text{ط}}}{\text{فاو}^{\text{ط}}} + \dots + \frac{\text{فاصه}^{\text{ص}}}{\text{فاو}^{\text{ص}}}\right)$$

•(٧٤)•

فأ + فأو + ... + فأغ + فأر

مع الاهتمام بأدخال التفاضلات فأو ، فأو ، ... ، فأغ ، فأر بقوى أسما صغر في الحدود التي لم تدخل فيها قوى هذه التفاضلات ثم نعويض القوى

فأ^١ و فأو^١ و ... و فأغ^١ و فأر^١

بالتفاضلات برتبة هـ وهي

فأ^٢ ، فأو^٢ ، ... ، فأغ^٢ ، فأر^٢

ونعويض هذه التفاضلات بالدوال

و ، و ، و ، و ، ع ، د ، م

متى كان ك مساويا للصفر

وقد أثبتنا هذه القضية في حالة عاملين وحيث نحتاج لإثبات أنها عمومية يكفي أن يثبت على أنه إذا كانت صحيحة بالنسبة لمحصل ضرب عوامل عددها م - ١ تكون صحيحة كذلك متى كان عدد العوامل م ولذلك نترجم بحرف صه لمحصل ضرب العوامل التي عددها م - ١ وهي و ، و ، و ، و ، ع فيكون

$$\text{فأ}^{\text{هـ}} (و \dots ع م) = \text{فأ}^{\text{هـ}} (ص م) = (\text{فأصه} + \text{فأر}^{\text{هـ}})$$

ولنعبر بحد احيثما اتفق من تحليل هذه القوة وليكن

$$\text{ج}^{\text{هـ}} \text{فأصه} \text{فأر}^{\text{هـ}} - \text{ك}^{\text{هـ}}$$

فموجب ما تقدم يحدث من هذا الحد الحد المناظر له من $\text{فأ}^{\text{هـ}} (و \dots ع م)$ وهو

$$\text{ج}^{\text{هـ}} \text{فأصه} \text{فأر}^{\text{هـ}} - \text{ك}^{\text{هـ}}$$

وبالفرض كان

$$\text{فأصه} = (\text{فأ} + \text{فأو} + \dots + \text{فأغ} + \text{فأر})$$

فيثبت يكون الحد المناظر مكتوبا كتابة بيانية هو

$$\text{ج}^{\text{هـ}} (\text{فأ} + \text{فأو} + \dots + \text{فأغ} + \text{فأر})^{\text{هـ}} - \text{ك}^{\text{هـ}}$$

و يجمع كافة الحدود يوجد بضاهذا القانون اليساني وهو

$$\text{فأ}^{\text{هـ}} (و \dots ع م) = (\text{فأ} + \text{فأو} + \dots + \text{فأغ} + \text{فأر})^{\text{هـ}}$$

د د د و ... دوال مركبة وحيث كانت مقادير هذه الدوال المركبة معدومة فتكون تفاضلاتها برتب مختلفة معدومة كذلك وحينئذ أخذ تفاضل المعادلات (١) مرة واحدة فوجد المعادلات

$$(٢) \left\{ \begin{array}{l} \text{فاس}^1 \text{ فاسه}^1 + \frac{\text{فاس}^1}{\text{فاسه}^1} + \frac{\text{فاس}^1}{\text{فاسه}^1} + \text{فاع}^1 + \dots = 0 \\ \text{فاس}^2 \text{ فاسه}^2 + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \text{فاع}^2 + \dots = 0 \\ \text{فاس}^3 \text{ فاسه}^3 + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \text{فاع}^3 + \dots = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

وبهذه المعادلات تبين التفاضلات برتبة أولى وهي

فاسه و فاع و فاس ...

كما شوهد في ب ٦٦ د واذا أخذ تفاضل المعادلات (٢) فوجد المجموعة

$$(٣) \left\{ \begin{array}{l} \left(\dots + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \text{فاسه}^2 + \dots \right) \\ = \left(\dots + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \frac{\text{فاس}^2}{\text{فاسه}^2} + \text{فاع}^2 + \dots \right) + \\ \left(\dots + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \text{فاسه}^3 + \dots \right) \\ = \left(\dots + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \frac{\text{فاس}^3}{\text{فاسه}^3} + \text{فاع}^3 + \dots \right) + \\ \left(\dots + \frac{\text{فاس}^4}{\text{فاسه}^4} + \frac{\text{فاس}^4}{\text{فاسه}^4} + \text{فاسه}^4 + \dots \right) \\ = \left(\dots + \frac{\text{فاس}^4}{\text{فاسه}^4} + \frac{\text{فاس}^4}{\text{فاسه}^4} + \text{فاع}^4 + \dots \right) + \\ \dots \end{array} \right.$$

* (٧٧) *

وبهذه المجموعة تتعين التفاضلات برتبة ثانية وهي

فأصه , فأع , فأب , ...

ويحصل على التفاضلات برتبة ثالثة بأخذ تفاضل المعادلات (٢) وهلم جرا

* (في تغيير المتغير الغير المتعلق) *

بمثال متى اعتبرت جملة متغيرات تتعلق باحدها فان المتغير الذي يعتبر متغيرا غير متعلق اي الذي يكون تفاضله كمية ثابتة يمكن اختياره بالاختيار الا انه قد يتأتى انه يعلم بعد اختيار هذا المتغير الغير المتعلق انه يكون الانفع انتخاب متغيرا آخر يجعل متغيرا غير متعلق فاذا ذلك يلزم تحويل قوانين المسئلة الى قوانين أخرى وهذا هو الغرض من المسئلة التي نحن بصدد حلها والتي تنطق بها هكذا
ليكن u المتغير الذي كان قد جعل متغيرا غير متعلق وليكن v احد المتغيرات الاجزا المعتبرة ويراد ايجاد مقادير المشتقات

$\frac{f}{f_u}, \frac{f}{f_v}, \frac{f}{f_{uv}}, \dots$

المأخوذة بفرض ان u ثابت بدلالة تفاضلات v و v معتبرين والتين لمتغير واحد غير متعلق اي اما كان
فلذلك نقرض بالرموز

u, v, w, \dots

المشتقات u, v مأخوذة بفرض ان u هو المتغير الغير المتعلق فيكون

$f_u = \frac{f}{u}, f_v = \frac{f}{v}, f_{uv} = \frac{f}{uv}, \dots$ (١)

وبموجب قاعدة بـ u تكون هذه القوانين حقيقية مهما كان المتغير الغير المتعلق ومن القانون الاول يحدث

$f_u = \frac{f}{u}$ (٢)

وهو ناتج معلوم وعلى مقتضاه تكون u خارج قسمة f على u فاذا طبقنا

(٧٨)

على هذا القانون قاعدة اخذ تفاضل خارج قسمة فهم ما كان المتغير الغير المتعلق بوجوده ان

$$\frac{\text{فاسه}^1 - \text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3}{\text{فاسه}^4}$$

لكن بموجب نائي قوانين (١) يكون فاسه مساويا للحاصل فاسه وحينئذ يكون

$$(٣) \quad \frac{\text{فاسه}^1 - \text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3}{\text{فاسه}^4}$$

فاذا طبقت قاعدة اخذ تفاضل خارج قسمة على هذا القانون يحدث

$$\frac{\text{فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3) - ٣ \text{ فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3) - \text{فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3)}{\text{فاسه}^4}$$

ولكون ان فاسه = فاسه فموجب ثالث قوانين (١) يحدث

$$(٤) \quad \frac{\text{فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3) - ٣ \text{ فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3) - \text{فاسه}^1 (\text{فاسه}^2 - \text{فاسه}^3)}{\text{فاسه}^4}$$

وبهذه الكيفية يتوصل بالتوالي على ^(١) فاسه و ^(٢) فاسه و ... ومن الواضح ان ^(٥) فاسه

يكون مدلولها واسطة تفاضلات فاسه و فاسه لغاية التفاضلات برتبة ٥
فاذا فرض في قوانين (٢) و (٣) و (٤) و ... ان فاسه ثابت توجد هذه القوانين المعلومة وهي

$$\frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2} = \text{فاسه}^3 \quad , \quad \frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2} = \text{فاسه}^3 \quad , \quad \frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2} = \text{فاسه}^3 \quad , \quad \dots$$

فاذا اريد جعل فاسه متغيرا غير متعلق أى جعل فاسه = كبة ثابتة تولد قوانين (٢) و (٣) و (٤) الى

$$\frac{\frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2}}{\frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2}} = \text{فاسه}^3 \quad , \quad \frac{\frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2}}{\left(\frac{\text{فاسه}^1}{\text{فاسه}^2}\right)} = \text{فاسه}^3$$

* (٧٩) *

$$\dots, \frac{\frac{\text{فاسه}^2}{\left(\frac{\text{فاسه}^2}{\text{فاسه}}\right)^2} - \frac{\text{فاسه}^3}{\text{فاسه} \text{ فاسه} \text{ فاسه}}}{\left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}}\right)} = \dots$$

وسيشاهد فيما بعد ان شاء الله تعالى ان الاتفع غالباً بالنظر لتماثل القوايين عدم تعيين المتغير الغير المتعلق

* (في تغيير جميع المتغيرات) *

بـ ٨٤ المسئلة التي نريد حلها يمكن النطق بها هكذا
لتسكن سـ دـ صـ و ع و ... متغيرات تتعلق بواحد منها وايكن سـ المتغير
الذي تفاضله معتبر ثابتاً ولتسكن ح دالة معلومة للمتغير سـ ولا كميات

$$\text{صـ دـ فاسه} \text{ و } \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \text{ و } \dots \text{ و ع و } \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \text{ و } \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \text{ و } \dots \text{ و } \dots$$

ويراد ايجاد ما يؤهل اليه مقدار ح متى غيرت المتغيرات سـ دـ صـ و ع و ...
بمتغيرات اخرى ولتسكن كـ لـ م و ... واعتبر احده هذه المتغيرات الاخيرة
وليكن كـ مثلاً متغيراً غير متعلق

فلاجل حل هذه المسئلة يتبدأ بتحويل مقدار ح بواسطة القوايين المذكورة في البند
السابق بحيث لا يكون المتغير الغير المتعلق معيناً فيشذ تصير دالة للمتغيرات سـ دـ صـ
و ع و ... ولتفاضلاتها وحيث صار الامر كما اذا كانت المتغيرات سـ دـ صـ
و ع و ... معلومة بدلالة المتغيرات الجديدة كـ لـ م و ... فتوجد
معادلات بالصورة

$$\text{سـ} = \text{دـ} (كـ لـ م و ع \dots) \text{ و } \text{صـ} = \text{عـ} (كـ لـ م و ع \dots)$$

$$\text{و ع} = \text{فـ} (كـ لـ م و ع \dots) \text{ و } \dots$$

ومن هذه المعادلات تستخرج بعلييات التفاضل مقادير

$$\text{فاسه} \text{ دـ فاسه} \text{ و فاسه} \text{ و } \dots \text{ دـ فاسه} \text{ و فاسه} \text{ و فاسه} \text{ و } \dots \text{ و } \dots$$

* (٨٠) *

مع الاهتمام بملاحظة الفرض فالـ = كمية ثابتة طبقاً للنطوق وحينئذ لا يبقى الا وضع جميع هذه المقادير في مقدار ح لاجل تقييم حل المسئلة
بتطبيق - ليكون سه و صه احدائين عماديين لنحن معلوم وليكن الاحداثي الاول وهو سه مجعولا متغيرا غير متعلق ويراد معرفة ما يؤول اليه الدالة

$$\frac{\frac{3}{2} \left(\frac{\text{فأصه}}{\text{فأسه}} + 1 \right)}{\frac{\text{فأصه}}{\text{فأسه}}} = ح$$

متى غير الاحداثيين العماديين سه و صه بالاحداثيين التطبيين ه و و الذين فيهما
و مجعول متغيرا غير متعلق
فبواسطة قوانين به٨١ يؤول مقدار ح الى

$$\frac{\frac{3}{2} (\text{فأسه} + \text{فأصه})}{\text{فأسه فأصه} - \text{فأصه فأسه}} = ح$$

وهنا ليس المتغير الغير المتعلق معنا
ومن المعلوم ان

$$\text{سه} = \text{هجتاو} \quad \text{و} \quad \text{صه} = \text{هجاو}$$

وبأخذ التفاضل يحدث

$$\text{فأسه} = \text{فأهجتاو} - \text{هجاو فاو}$$

$$\text{فأصه} = \text{فأهجاو} + \text{هجتاو فاو}$$

وبأخذ التفاضل مرة جديدة وملاحظة ان فاو = كمية ثابتة يحدث

$$\text{فأسه} = \text{فأهجتاو} - ٢ \text{فأهجاو فاو} - \text{هجتاو فاو}$$

$$\text{فأصه} = \text{فأهجاو} + ٢ \text{فأهجتاو فاو} - \text{هجاو فاو}$$

ومن هذه القوانين يستنتج أن

$$\text{فأسه} + \text{فأصه} = \text{فأه} + \text{هفاو}$$

$$\text{فأسه فأصه} - \text{فأصه فأسه} = - \text{هفاو فاو} + ٢ \text{فأه فاو} + \text{هفاو}$$

و حينئذ

وحيث يكون

$$\frac{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}f_a + f_a)}{r f_a f_a + r f_a f_a + r f_a f_a} = 2$$

أو

$$\frac{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}f_a + f_a)}{\frac{r}{r}f_a - \frac{r}{r}f_a + r + f_a} = 2$$

بمعنى قد يتأتى في المسائل التي يحتاج فيها التغيير المتغيرات أن لا تكون المتغيرات الأصلية معلومة مباشرة بدلالة المتغيرات الجديدة بل تكون مرتبطة بها بمعادلات تفاضلية معلومة ففي هذه الحالة قد يتأتى أحيانا أن المعادلات التفاضلية المعلومة تكفي هي والمعادلات التي تستنتج منها بعمليات أخذ التفاضل لحذف المتغيرات الأصلية الداخلة في المقدار الجبري اللازم تحويله مثلاً لأخذ الدالة

$$(1) \quad \frac{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}f_a + 1)}{\frac{r}{r}f_a} = 2$$

التي اشتغلنا بها في البند السابق ولنبحث عما يؤول إليه مقدار ح متى غير المتغيران س و ص بمتغيرين آخرين هـ و هـ مرتبة بين المتغيرين الأولين بالمعادلتين

$$(2) \quad s = h + v$$

$$(3) \quad f_a = h + v + f_a$$

وجعل f_a تفاضلاً ثابتاً

فتبتدئ بتحويل ح بحيث لا يكون المتغير الغير المتعلق معيناً فتحصل كما سبق على المقدار

(٨٢)

$$(٤) \quad \frac{\frac{3}{2}(\text{فاسه} + \text{فاسه})}{\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}} = 2$$

إذا علمت ذلك نأخذ تفاضلي المعادلتين (٢) و (٣) فيحدث

$$(٥) \quad \text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه} = ٥ \text{ فاه}$$

$$(٦) \quad \text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه} = ٥$$

و يأخذ تفاضل معادلة (٥) يحدث

$$(\text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه}) - (\text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه}) = ٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه}$$

وبمراعاة قانون (٣) يحدث

$$(٧) \quad \text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه} = ٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه} - ٥ \text{ فاه}$$

ومن قانوني (٦) و (٧) يحدث

$$(\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}) - (\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}) = ٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه} - ٥ \text{ فاه}$$

$$(\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}) - (\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}) = ٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه} - ٥ \text{ فاه}$$

ومن هنا يكون

$$\frac{٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه} - ٥ \text{ فاه}}{\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}} = \text{فاسه فاسه}$$

وغير ذلك يعلم أن

$$\text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه} = (\text{فاسه} + \text{فاسه}) - (\text{فاسه} + \text{فاسه}) - (\text{فاسه فاسه} + \text{فاسه فاسه})$$

$$٥ = \text{فاه} - \text{فاه}$$

وحيث قد يكون

$$(٨) \quad \frac{٥ \text{ فاه} + ٥ \text{ فاه} - ٥ \text{ فاه}}{\text{فاه} + \text{فاه}} = \text{فاسه فاسه} - \text{فاسه فاسه}$$

وبواسطة

(٨٣)

وبواسطة قانوني (٢) و (٨) يؤل مقدار ح الى

$$\frac{f_1 f_2 - f_1 f_2}{f_1 + f_2 - f_1 - f_2} = 2$$

ار

$$\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = 2$$



الفصل الرابع

في التفاضلات مرتبة مختلفة للدوال ذات العدة

متغيرات الغير المتعلقة

في التفاضلات الجزئية والتفاضل الكلي لدالة ذات عدة

متغيرات غير متعلقة

بعد قد اشتغلنا في الفصول السابقة بالقواعد العمومية المتعلقة بالدوال ذات المتغير الواحد الغير المتعلق والآن نشتغل بالدوال ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة فنقول لتكن

$$z = z(x, y, \dots, u, v, \dots)$$

دالة ذات متغيرات غير متعلقة عددها m وهي x, y, \dots, u, v, \dots و n دالة ذات متغيرات غير متعلقة عددها n وهي z, \dots, w, \dots فنقول ان الدالة z مستمرة بين هذه النهايات متى أعطيت للمتغيرات عددها m من هذه المتغيرات مقادير معينة وكانت z دالة مستمرة للمتغير المجهي

اذا علمت ذلك فان رمز بالرموز

$$z = z(x, y, \dots, u, v, \dots)$$

لزيادة الاختبارية للمتغيرات الغير المتعلقة z, \dots, w, \dots و n فنكون المقادير

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \dots = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v} = \dots = \frac{\partial z}{\partial w} = \dots = \frac{\partial z}{\partial \dots}$$

هي تفاضلات z معتبرة على التوالي دوال للمتغير الواحد x, y, \dots, u, v, \dots أو z, \dots, w, \dots أو z, \dots, w, \dots وبسبب أن z, \dots, w, \dots دالة ذات متغيرات غير متعلقة يكون

* (١٥) *

ف ص = ف ص ، ف ص = ف ص ، ف ع = ف ا ع ، ... ، ف ص = ف ص

بحيث يمكن كتابة التفاضلات المتقدمة هكذا

$$\frac{ف}{ف ص} ، \frac{ف}{ف ص} ، \frac{ف}{ف ا ع} ، \frac{ف}{ف ا ع} ، \dots ، \frac{ف}{ف ص}$$

وبالعودة للتفاضلات التفاضلات الجزئية للدالة $ف$ بالنسبة للمتغيرات $ص$ ، $ص$ ، $ع$ ، ... ، $ص$ بالتناظر وكذا يقال للمشتقات

$$\frac{ف}{ف ص} ، \frac{ف}{ف ص} ، \frac{ف}{ف ا ع} ، \frac{ف}{ف ا ع} ، \dots ، \frac{ف}{ف ص}$$

المشتقات الجزئية للدالة $ف$

بمعنى تفاضل $ف$ كلياً للدالة ذات عدة متغيرات غير متعلقة بمجموع التفاضلات الجزئية المأخوذة بالنسبة للمتغيرات المذكورة ويستدل على هذا التفاضل الكلي بالرمز $ف$ فلي هذا يكون

$$ف = \frac{ف}{ف ص} + \frac{ف}{ف ص} + \frac{ف}{ف ا ع} + \frac{ف}{ف ا ع} + \dots + \frac{ف}{ف ص}$$

ومن هذا التعريف نتج النتائج الآتية وهي

الاولى اذا آلت أي دالة $ف$ ذات عدة متغيرات غير متعلقة ولتكن $ص$ ، $ص$ ، $ع$ ، ... ، $ص$ الى كمية ثابتة بمقادير هذه المتغيرات المحصورة على التناظر بين نهايات ما أقول ان تفاضلها الكلي $ف$ يكون معدوماً وبالعكس أي اذا كان تفاضل الدالة $ف$ معدوماً على الدوام فان هذه الدالة تنزل الى كمية ثابتة

لانه اذا آلت الدالة $ف$ الى كمية ثابتة تكون المشتقات $\frac{ف}{ف ص}$ ، $\frac{ف}{ف ص}$ ، ... ،

$\frac{ف}{ف ص}$ معدومة وحينئذ يكون التفاضل $ف$ معدوماً

واذا كان $ف = 0$ أي اذا كان

$$\frac{ف}{ف ص} + \frac{ف}{ف ص} + \frac{ف}{ف ا ع} + \frac{ف}{ف ا ع} + \dots + \frac{ف}{ف ص} = 0$$

فيسبب أن $ف$ ، $ف$ ، $ف$ ، ... ، $ف$ كميات اختيارية يجب ان يكون

$$\frac{ف}{ف ص} = 0 ، \frac{ف}{ف ص} = 0 ، \dots ، \frac{ف}{ف ص} = 0$$

(٨٦)

ومن هذه القوانين يتبين أن ψ غير متعلقة بالتغيرات s و v و e و m واذن يكون

$$\psi = \text{كينة ثابتة}$$

الثانية اذالم تفرق أى الدالتين مثل v و e عن بعضهما الا بكينة ثابتة بجميع مقادير التغيرات الغير المتعلقة s و v و e و m المحصورة بين نهايات ما على التناظر فتفاضلا هاتين الدالتين يكونان متساويين وبالعكس أى اذا كان تفاضلا الدالتين v و e متساويين فان هاتين الدالتين لا تفرقان عن بعضهما الا بكينة ثابتة وهذه القضية مقتصرة فى القضية المتقدمة لانه يمكن ان يفرض أن $\psi = 0$ و e

فى مقارنة زيادة أى دالة ذات عدة متغيرات بتفاضلها

بـ ψ لتكن

$$\psi = (s \text{ و } v \text{ و } e)$$

دالة ذات متغيرات s و v و e ولنرمز بالرمز ψ للزيادة التى تأخذها الدالة ψ متى اعطيت الزيادةات الاختيارية وهى

$$s \text{ و } v \text{ و } e$$

للتغيرات المذكورة على التناظر فباستعمال الطريقة التى اتبعناها لاجل اثبات قاعدة الدوال المركبة يحدث

$$(1) \quad s(s + v + e) - s(s + v) = s(e) \quad \text{و} \quad s(s + v + e) - s(s + e) = s(v)$$

$$(2) \quad s(s + v + e) - s(s + e) = s(v) \quad \text{و} \quad s(s + v + e) - s(s + v) = s(e)$$

$$(3) \quad s(s + v + e) - s(s + v) = s(e) \quad \text{و} \quad s(s + v + e) - s(s + e) = s(v)$$

وحروف s و v و e الداخلة فى هذه المعادلات وزادوا لتقبل الى الصفر متى مالت الزيادةات s و v و e على التناظر اليه

فاذا غير s فقط فى معادلة (٢) ثم غير s و v فى معادلة (٣) يحدث

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} s(s + v + e) - s(s + v + e) &= s(s + v + e) - s(s + v + e) \\ s(s + v + e) - s(s + v + e) &= s(s + v + e) - s(s + v + e) \end{aligned} \right\} \text{ و}$$

$$(٥) \left\{ \begin{array}{l} (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) - (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) \\ (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) + (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) \end{array} \right. =$$

والدالة $\frac{س}{ف}$ تنعدم متى انعدمت الزيادتان $ف + ص$ ، $ف + ص$ والدالة $\frac{س}{ف}$ تنعدم حينما تنعدم الزيادات $ف + ص$ ، $ف + ص$ ، $ف + ص$

فاذا اضيفت المعادلة (١) الى مجموع المعادلتين الاخيرتين (٤) و (٥) يحدث

$$\begin{aligned} & (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) - (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) \\ & = [س + ف + ص + د + ع] + [س + ف + ص + د + ع] + [س + ف + ص + د + ع] \\ & + [س + ف + ص + ف + ص + د + ع] + [س + ف + ص + ف + ص + د + ع] \end{aligned}$$

وبالمرتب يحوّل $\frac{س}{ف}$ الى $\frac{س}{ف}$ لالتين جديدتين قبلان الى الصفر يحدث

$$\begin{aligned} & (س + ف + ص + د + ع) + (س + ف + ص + د + ع) + (س + ف + ص + د + ع) \\ & + (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) + (س + ف + ص + ف + ص + د + ع) \end{aligned}$$

أو

$$\frac{س}{ف} = \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف}$$

أو

$$\frac{س}{ف} = \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف}$$

ومن هنا ينتج أن

$$\frac{س}{ف} = 1 + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف} + \frac{س}{ف}$$

وبناء على ذلك اذا لم تكن المشتقات الجزئية

$$\frac{س}{ف} ، \frac{س}{ف} ، \frac{س}{ف}$$

معدومة كلها تميل النسبة $\frac{س}{ف}$ الى الواحد متى مالت الزيادات $ف + ص$ ، $ف + ص$ ، $ف + ص$ الى الصفر بشرط أن لا تزال احدى نسب هذه الزيادات الى احدى هذه الزيادات اختيارية

* (٨٩) *

$$\frac{فا}{فاص} = \left(\frac{فا}{فاص} + \frac{فا}{فاك} + \frac{فا}{فاك} + \dots + \frac{فا}{فان} \right)$$

$$+ \left(\frac{فا}{فاص} + \frac{فا}{فاك} + \frac{فا}{فاك} + \dots + \frac{فا}{فان} \right)$$

.....

$$+ \left(\frac{فا}{فاص} + \frac{فا}{فاك} + \frac{فا}{فاك} + \dots + \frac{فا}{فان} \right)$$

وحيث ان حواصل الجمع المضروبة على التناظر في المشتقات الجزئية وهي

$$\frac{فا}{فاص}, \frac{فا}{فاك}, \dots, \frac{فا}{فان}$$

الداخلية في هذا القانون هي مقادير التفاضلات فاصه و فاكه و فانه فيكون

$$\frac{فا}{فاص} + \frac{فا}{فاك} + \frac{فا}{فاك} + \dots + \frac{فا}{فان} = \frac{فا}{فاص}$$

وهو المطلوب اثباته

نتيجة - قواعد اخذ تفاضل حواصل جمع وحواصل ضرب وخارج قسم وقوى الدوال ذات المتغير الواحد يمكن تطبيقها لاختلاف تفاضل الدوال ذات العدد متغيرات الغير المتعلقة

في التفاضلات الجزئية والتفاضلات الكلية برتب أعلا للدوال ذات العدد متغيرات الغير المتعلقة

بـ ٨٩ لتكن

$$v = s (s \text{ صه د ع و } ٠٠٠ \text{ د م}) \quad (١)$$

والذات متغيرات عددها م وهي سه صه د ع و ٠٠٠ د م فقد شوهد في بـ ٧٤ د

$$\frac{م(١+م) \cdot ٠٠٠(١+م) \cdot (١+م)}{٠ \times \dots \times ٢ \times ١}$$

انه يمكن اعتبار مشتقات برتبة و عددها يساوي

وبموجب بـ ٧٤ يمكن تغيير العمليات التي عددها و اللازمة لتكوين كل مشتقة من

المشتقات التي رتبها و وهذه المشتقات تبين على وجه التعميم كما سبق ذكره بالمتدار

تفاضل ل

* (٩٠) *

(٢)

$$\frac{\text{فأ}}{\text{فأسه فاصه... فأط}}$$

الذي فيه الحروف ل و ع و ... و ط تدل على أعداد صحيحة يمكن أن تكون معدومة ومجموعها يساوي ه والدوال الميمنة بالمقدار الجبرى (٢) يقال لها المشتقات الجزئية برتبة ه للدالة ه

وحيث كانت تفاضلات المتغيرات الغير المتعلقة اختيارية فتفرض ثابتة وحينئذ اذا وجب أن تجرى على ه عمليات تفاضل عددها ل تؤخذ بالنسبة للتغير ه وعمليات تفاضل عددها ع تؤخذ بالنسبة للتغير ه وهكذا الى المتغير ه أى اذا وجب أن تجرى على ه عمليات تفاضل عددها ط تؤخذ بالنسبة الى ه يمكن إجراء هذه العمليات بترتيب حيثما اتفق وبذلك يتوصل على نتائج يسد دل عليه بالرمز

$$(٣) \quad \frac{\text{فأ}}{\text{فأسه فاصه... فأط}}$$

وحرف ه رمز المجموع ل + ع + ... + ط والدوال المختلفة الشامل لها القانون (٣) يقال لها التفاضلات الجزئية برتبة ه للدالة ه

بمنه يمكن فأ التفاضل الكلى للدالة ه فنرمز بالرمز فأ للتفاضل الكلى فأفأ للتفاضل فأ وبالرمز فأفأ للتفاضل الكلى للتفاضل فأ وهكذا بحيث انه اذا اعتبرنا التتابع

$$(٤) \quad \text{فأ} \text{ و } \text{فأ} \text{ و } \text{فأ} \text{ و } \dots \text{ و } \text{فأ} \text{ و } \dots$$

يكون كل حد من الحدود الكلى للتفاضل الكلى للحدود السابق له والدوال (٤) يقال لها التفاضلات الكلى للدالة ه برتبة أولى و برتبة ثانية وهكذا

ومقدار التفاضل الكلى برتبة أولى هو

$$(٥) \quad \text{فأ} = \frac{\text{فأ}}{\text{فأسه}} + \frac{\text{فأ}}{\text{فأسه}} + \dots + \frac{\text{فأ}}{\text{فأط}}$$

ومنه يستنتج ان التفاضل الكلى برتبة ه يمكن الدلالة عليه بالقانون

* (٩٢) *

التفاضلات الكلية المراد حسابها على حالتها وبذلك ترجع المسئلة الى حالة دوال ذات متغير واحد وحقيقة اذ ارمرنا بمحروف x و y و z ... و t للتغيرات الغير المتعلقة واريد حساب

$$\frac{f(x, y, z, \dots, t)}{f(x, y, z, \dots, t)}$$

يؤخذ تفاضل المعادلة

$$f(x, y, z, \dots, t) = 0 \quad (x, y, z, \dots, t)$$

بالنسبة للتغير x مرار عددها n فتحصل المشتقة $\frac{df}{dx}$ ثم يؤخذ تفاضل الناتج

المتحصل بالنسبة للتغير y مرار عددها m فتحصل المشتقة $\frac{d^2f}{dy dx}$ وهكذا

في حساب التفاضلات برتب مختلفة للدوال الغير محمولة
ذات العدد متغيرات الغير المتعلقة

بـ ٩٢ د الحالات الاعمال للدوال الغير المحمولة هي التي تعطى فيها مازلات عددها m واقعة بين متغيرات غير متعلقة عددها n ودوال عددها m لهذه المتغيرات وحيث كانت الاطراف الثانية للمعادلات المفروضة مفروضة معدومة فتكون الاطراف الاول دوال مركبة من دوال للمتغيرات الغير المتعلقة التي عددها n ومقدارها صغير وبناء على ذلك تكون تفاضلاتها الكلية برتب مختلفة معدومة وحيث يمكن بواسطة عمليات تفاضل متتالية ان تستنتج من المعادلات المفروضة مجموعات جديدة بها تعلم بالتوالي التفاضلات الكلية برتبة اولى للدوال التي عددها m المعتبرة ثم تعلم التفاضلات الكلية برتبة ثانية وهم جزا

بـ ٩٣ د الا انه بدلا عن حساب التفاضلات الكلية مباشرة يمكن البحث عن المشتقات الجزئية التي توجد في مقاديرها كل واحدة على حدة واحساب هذه المشتقات بحري على حسب قاعدة الدوال الغير المحمولة للتغير واحد غير متعلق

مثلا

(٩٣)

مثلاً نعتبر الحالة التي تعتبر فيها دالة واحدة $ع$ لتغيرين $ص$ و $هـ$ مرتبطين بالدالة بمعادلة معلومة ولتكن

$$(١) \quad ص = ع + هـ$$

ولتكن $ع$ و $ك$ المشتقتين الجزئيتين اللتين برتبة أولى وهما $\frac{فاع}{فاصه}$ و $\frac{فاع}{فاسه}$ فيكون

$$فاع = ع + فاصه + ك فاصه$$

وكذلك اذا رمزنا بحروف $هـ$ و $و$ و $ز$ المشتقات الجزئية التي برتبة ثانية وهما

$$\frac{فاع}{فاسه} \quad و \quad \frac{فاع}{فاسه فاصه} \quad و \quad \frac{فاع}{فاسه} \quad يحدث$$

$$فاع = هـ فاسه + و فاصه + ز فاصه$$

وهكذا ويلزم أن ينسب إلى ان مقدارى التفاضلين الكليين $فاع$ و $فاك$ هما على التناظر

$$فاع = هـ فاسه + و فاصه$$

$$فاك = و فاصه + ز فاصه$$

اذا علمت ذلك فلاجل ايجاد $ع$ و $ك$ يؤخذ تفاضل المعادلة المفروضة باعتبار $ص$ متغير فقط ثم يؤخذ تفاضلهما باعتبار $ص$ متغير فقط متغيراً فذلك يحدث (راجع به التذات) شئت

$$(٢) \quad \frac{فاع}{فاسه} + ع = \frac{فاع}{فاسه} = ٠ \quad و \quad \frac{فاع}{فاسه} + ك = \frac{فاع}{فاسه} = ٠$$

ومن هنا يكون

$$(٣) \quad \frac{\frac{فاع}{فاسه}}{\frac{فاع}{فاسه}} = ك \quad و \quad \frac{\frac{فاع}{فاسه}}{\frac{فاع}{فاسه}} = ع$$

ولاجل ايجاد $هـ$ و $و$ و $ز$ يكفي أخذ تفاضل المعادلتين (٢) أو المعادلتين (٣) ان أريدنا فاذ أخذ تفاضل المعادلتين (٢) بالنسبة للتغير $ص$ ثم بالنسبة للتغير $ص$ نتحصل ثلاث معادلات مقبولة وهي

(٩٤)

$$(٤) \left\{ \begin{aligned} & \frac{فأ}{فأصه} + ٢ \frac{فأ}{فأصه فاع} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ع}{فأ} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ه}{فأ فاع} = ٠ \\ & \frac{فأ}{فأصه} + \frac{فأ}{فأصه فاع} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ع}{فأصه فاع} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ك}{فأ فاع} + \frac{فأ}{فأ} \frac{و}{فأ فاع} = ٠ \\ & \frac{فأ}{فأصه} + ٢ \frac{فأ}{فأصه فاع} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ك}{فأ} + \frac{فأ}{فأ} \frac{ز}{فأ فاع} = ٠ \end{aligned} \right.$$

وبهاتين المشتقات الجزئية هـ و ز ويلزم أن يتنبه الى أنه يتحصل بأخذ تفاضل المعادلة الاولى من المعادلتين (٢) بالنسبة للتغير صه على نفس الناتج الذي يتحصل عليه اذا أخذ تفاضل الثانية منهما بالنسبة للتغير سه
فاذا أخذ تفاضل المعادلات (٤) تتحصل المشتقات الجزئية التي برتبة ثالثة وهم جراً
به ٩٤ مثال - لتكن المعادلة

$سه = ع + ف + فاصه$
الواقعة بين المتغيرين الغير المتعلقين سه و فاصه والدالة ع لذين المتغيرين فاذا أجرى العمل كما تقدم يكون

$$\begin{aligned} & فاع = ع + فاصه + ك فاصه \\ & فاح = ه + فاصه + و فاصه \\ & فاك = و فاصه + ز فاصه \end{aligned}$$

ويوجد بالتوالي أن

$$سه + ع = ٠ \quad و \quad سه + ك = ٠$$

ثم يوجد أن

$$١ + ع + ه = ٠ \quad و \quad ع + ك + و = ٠ \quad و \quad ١ + ك + ز = ٠$$

ومن هنا يستخرج أن

$$\begin{aligned} & ع = -\frac{سه}{١} \quad و \quad ك = -\frac{سه}{١} \\ & ه = -\frac{سه + ع}{١} \quad و \quad و = -\frac{سه}{١} \quad و \quad ز = -\frac{سه + ع}{١} \end{aligned}$$

فطرية تتعلق بالدول المتحاذية

بشأن يقال ان الدالات ذات العدة متغيرات متجانسة وبدرجة م اذا ضرب كل متغير في كمية غير معينة م ووجدت الدالة مضروبة في م والدرجة م يمكن ان تكون صحيحة أو كسرية وقد تكون موجبة أو معدومة أو سالبة ويقال لحد درجة متجانس الدالة اذا قدر هذا فلتكن (س، ص، ع، ...) دالة متجانسة وبدرجة م وانمكن (س، ص، ع، ...) (س، ص، ع، ...) (س، ص، ع، ...) مشتقاتها بالانسية للمتغيرات س، ص، ع، ... الخ فموجب التعريف يكون

$$(1) \quad (\dots, s, s, s, \dots) \stackrel{M}{=} (\dots, s, s, s, \dots)$$

فإذا أخذنا تفاضل الطرفين بالنسبة إلى x فقط يحدث

$$\dots + \left(\text{مستقیم و مربع د...} \right) + \left(\text{مستقیم و مربع د...} \right)$$

$$= \sqrt{m}^{-1} (m, m, \dots, m, \dots)$$

فأذا جعلنا $r = 1$ في هذه المتطابقة يحدث

$$(r) \quad v = \dots + \frac{f_2}{f_1} \varepsilon + \frac{f_3}{f_2} \varepsilon^2 + \frac{f_4}{f_3} \varepsilon^3 + \dots$$

وهذا هو القانون الذي تقتصر فيه نظرية الدوال المتجانسة الكثيرة الاستعمال في العلوم الرياضية ويمكن النطق به بأن يقال

إذا أخذت مشتقات أي دالة متجانسة ذات عدة متغيرات بالنسبة لكل متغير وضربت كل مشتقة في المتغير المأخوذة هذه المشتقة بالنسبة له فإن مجموع حواصل الضرب التي تحصل عليها مساوي حاصل ضرب الدالة المتجانسة المفروضة في درجة التجانس

ويمكن التنبيه على أنه إذا فرض أن $r = \frac{1}{m}$ في المطابقة (١) يتحصل

$$\left(\dots, \frac{\varepsilon}{m}, \frac{m}{m} \right)_{S=m} = \frac{(\dots, m, m, \dots)_S}{m}$$

ومن هنا يعلم انه اذا قسمت أى دالة متجانسة وبدرجة م على القوة الميعة لاحد متغيراتها فان الخارج لا يتعلق الا بنسب المتغيرات الاخرى الى المتغير المذكور



في تغيير المتغيرات الغير المتعلقة

بـ ١٦٦ المسئلة التي نريد حلها يمكن النطق بها هكذا

لتكن y دالة ذات متغيرات s, r, c, \dots عددها m فاذا اعتبرت المتغيرات s, r, c, \dots دوالاً لمتغيرات جديدة عددها m ولتكن z, k, \dots تصير y دالة لهذه المتغيرات الجديدة اذا قررر هذا افراد ايجاد المشتقات الجزئية وهي

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial y}{\partial s} & , & \frac{\partial y}{\partial r} & , & \frac{\partial y}{\partial c} & , & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial s^2} & , & \frac{\partial y}{\partial r^2} & , & \frac{\partial y}{\partial c^2} & , & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial s \partial r} & , & \frac{\partial y}{\partial r \partial c} & , & \frac{\partial y}{\partial c \partial s} & , & \dots \end{array}$$

المأخوذة بفرض s, r, c, \dots متغيرات غير متعلقة بدلالة المشتقات الجزئية

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial y}{\partial s} & , & \frac{\partial y}{\partial r} & , & \frac{\partial y}{\partial c} & , & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial s^2} & , & \frac{\partial y}{\partial r^2} & , & \frac{\partial y}{\partial c^2} & , & \dots \\ \frac{\partial y}{\partial s \partial r} & , & \frac{\partial y}{\partial r \partial c} & , & \frac{\partial y}{\partial c \partial s} & , & \dots \end{array}$$

المأخوذة بفرض z, k, l, \dots متغيرات غير متعلقة وهذا المتغيرات الاصلية وهي s, r, c, \dots معلومة بدلالة المتغيرات الجديدة وهي z, k, l, \dots وبالعكس أى ان هذه المتغيرات الجديدة دوال معلومة للمتغيرات الاصلية

وحينئذ اذا اعتبرنا y دالة للمتغيرات z, k, l, \dots واعتبرنا z, k, l, \dots دوالاً للمتغيرات s, r, c, \dots فان حل المسئلة المفروضة يستنتج مباشرة من قاعدة اخذ تفاضل الدوال المركبة

لانه في الواقع يكون

$$(١) \quad \text{فاس} = \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \dots$$

ويكون

$$(٢) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{فاس} = \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \dots \\ \text{فاس} = \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

وحيث كانت المتغيرات ك ، ل ، \dots معلومة بدلالة س ، ص ، ع ، \dots فذلك المشتقات $\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}$ ، \dots ، $\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}$ ، \dots دوال معلومة كذلك للمتغيرات س ، ص ، ع ، \dots الا انه يجب حسابها بدلالة ك ، ل ، \dots فاذا وضعت هذه المقادير في معادلة (١) تكون معاملات فاس ، فاس ، فاس ، \dots هي المقادير الجبرية المطلوبة للمشتقات الجزئية وهي

$$\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \dots$$

بدلالة المتغيرات ك ، ل ، \dots والمشتقات

$$\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}، \dots$$

وبهذه الكيفية يجري العمل لاجل حساب المشتقات ذات الرتب الاعلا فيوضع

$$\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} = \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \frac{\text{فاس}}{\text{فاس}} + \dots$$

وحينئذ اعوضت $\frac{\text{فاس}}{\text{فاس}}$ الدالة في الطرف الثاني بالمتدار السابق تحصيله وعوضت

التفاضلات فاس ، فاس ، فاس ، \dots بمقاديرها المستخرجة من قوانين (٢)

تكون معاملات فاس ، فاس ، فاس ، \dots دالة على المقادير المطلوبة للمشتقات

الجزئية وهي

* (٩٩) *

$$\text{فاه} = \frac{\text{سه فاسه} + \text{صه فاصه} + \text{ع فاع}}{\text{سه} + \text{صه} + \text{ع}}$$

$$\text{فاو} = \frac{\text{ع} (\text{سه فاسه} + \text{صه فاصه}) - (\text{سه} + \text{صه}) \text{فاع}}{(\text{سه} + \text{صه} + \text{ع}) \frac{\text{ع}}{\text{جاو}}}$$

$$\text{فار} = \frac{(\text{صه فاصه} + \text{سه فاسه}) \text{ختار}}{\text{سه}}$$

وبملاحظة قوانين (١) يكون

$$\left. \begin{aligned} \text{فاه} &= \text{جاو جتار فاسه} + \text{جاو جار فاصه} + \text{جتا و فاع} \\ \text{فاو} &= \frac{1}{\text{ه}} \text{جتا و جتار فاسه} + \frac{1}{\text{ه}} \text{جتا و جار فاصه} - \frac{1}{\text{ه}} \text{جاو فاع} \\ \text{فار} &= \frac{1}{\text{ه}} \text{جار فاسه} + \frac{1}{\text{ه}} \text{جتار فاصه} \end{aligned} \right\} \quad (٣)$$

فاذا وضعت مقادير فاه ، فاو ، فار هذه في القانون

$$\text{فان} = \frac{\text{فاه}}{\text{فاه}} + \frac{\text{فاو}}{\text{فاو}} + \frac{\text{فار}}{\text{فار}}$$

يحدث

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{فان}}{\text{فاسه}} &= \frac{\text{فان}}{\text{فاه}} + \frac{\text{جاو جتار}}{\text{فاو}} + \frac{\text{جتا و جتار}}{\text{فار}} - \frac{\text{فان}}{\text{فار ه جاو}} \\ \frac{\text{فان}}{\text{فاصه}} &= \frac{\text{فان}}{\text{فاه}} + \frac{\text{جاو جار}}{\text{فاو}} + \frac{\text{جتا و جار}}{\text{فار ه جاو}} \\ \frac{\text{فان}}{\text{فاع}} &= \frac{\text{فان}}{\text{فاه}} \text{جتا و} - \frac{\text{فان}}{\text{فاو ه}} \end{aligned} \right\} \quad (٤)$$

ويلزم الآن تكوين التفاضلات الكلية للمشتقات

$$\frac{\text{فان}}{\text{فاسه}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{فان}}{\text{فاصه}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{فان}}{\text{فاع}}$$

أى تكوين المشتقات الجزئية لهذه الكميات بالنسبة الى ه ، و ، ر فيوجد أن

(١٠٤)

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}} = \frac{\text{ف ف جتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حاو}}{\text{ف ه}} , \\ & \frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}} = \frac{\text{ف ف جتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حاو}}{\text{ف ه}} , \\ & \frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}} = \frac{\text{ف ف جتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حاو}}{\text{ف ه}} \end{aligned} \right\} (v)$$

فاذا جمعت المعادلات (هـ) بعد ضربها بالتناظر في المعادلات (٣) يوجد التفاضل الكلي للمشتقة $\frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}}$ وتكون معاملات فاسه ، فاصه ، فاع في هذا المقدار الجبري هي المقادير المطلوبة للمشتقات

$$\frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}} , \frac{\text{ف فاصه}}{\text{ف ه}} , \frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}}$$

وبمثل ذلك يتحصل على المشتقات الجزئية الأخرى بإضافة المعادلات (٦) أو (٧) بالتوالي بعد ضربها في المعادلات (٣) وبذلك يوجد أن

$$\begin{aligned} \frac{\text{ف فاع}}{\text{ف ه}} &= \frac{\text{ف ف جتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} \\ &+ \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} - \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} \\ &+ \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} \\ &+ \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} + \frac{\text{ف ف حتاو حتاو}}{\text{ف ه}} \end{aligned}$$

※(1・7)※

$$\frac{\text{فامه فامه}}{\text{فامه فامه}} = \frac{\text{فامه فامه}}{\text{فامه فامه}} + \frac{\text{فامه فامه}}{\text{فامه فامه}} + \frac{\text{فامه فامه}}{\text{فامه فامه}} + \frac{\text{فامه فامه}}{\text{فامه فامه}}$$

$$+ \frac{f_{\text{ف}}}{f_{\text{فاو}}} \frac{f_{\text{ح}}}{f_{\text{حفاو}}} + \frac{f_{\text{ف}}}{f_{\text{فاو}}} \frac{(f_{\text{ح}} - f_{\text{حفاو}})}{f_{\text{فاو}}} - \frac{f_{\text{ف}}}{f_{\text{فاو}}} \frac{f_{\text{ح}}}{f_{\text{حفاو}}}$$

$$\frac{\text{فام}}{\text{فاو}} - \frac{\text{خاو حار حتار}}{\text{فاو}} - \frac{(1 + \alpha) \text{جتاوجار جتار}}{\text{هجاو}} - \frac{\text{فاق حثار سثار}}{\text{فار هثاو}}$$

$$\frac{\text{فَاع}}{\text{فَاعِدَار}} - \frac{\text{فَاع}(\text{حَتَاو-حَتَار})}{\text{ه}} + \frac{\text{فَاع} \text{ جَاو حَتَاو حَتَار}}{\text{فَاعِدَاو}} = \frac{\text{فَاع}}{\text{فَاعِدَاع}}$$

$$\frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{اوتار}} - f_{\text{اوتار}} + f_{\text{اوتار}}} + \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{اوتار}} - f_{\text{اوتار}}} - \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{اوتار}} - f_{\text{اوتار}}} - \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{اوتار}} - f_{\text{اوتار}}}$$

$$\frac{\text{فاح} (\text{حِثَّاء} - \text{حِثَّاء})}{\text{فاح}}$$

$$\frac{f_{\text{حار حار}}}{e} \cdot \frac{f_{\text{فان}}^2}{f_{\text{فان فافار}}} + \frac{f_{\text{حاو حنا و حار}}}{e} \cdot \frac{f_{\text{فان}}^2}{f_{\text{فان فانو}}} + \frac{f_{\text{جاو جار}}}{e} \cdot \frac{f_{\text{فان}}^2}{f_{\text{فان فافا}}} = \frac{f_{\text{فان}}}{f_{\text{فاضمه}}}$$

$$+ \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{او}}^2} + \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{او}}^2} + \frac{f_{\text{اوتار}}}{f_{\text{او}}^2}$$

$$+ \frac{\text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام} + \text{فام}}{\text{فام}} + \frac{\text{فام} (\text{فام} + \text{فام})}{\text{فام}} - \frac{\text{فام}}{\text{فام}}$$

$$\frac{\text{فٲ}}{\text{فاصم فاع}} = \frac{\text{فٲ}}{\text{فاصم فاع}} + \frac{\text{فٲ}}{\text{فاصم فاع}} + \frac{\text{فٲ}}{\text{فاصم فاع}} + \frac{\text{فٲ}}{\text{فاصم فاع}}$$

$\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}$	$\frac{\text{فاو حار}}{\text{فاو حار}}$	$\frac{\text{فاو حار}}{\text{فاو حار}}$
$\frac{\text{فاو حار}}{\text{فاو حار}}$	$\frac{\text{فاو حار}}{\text{فاو حار}}$	$\frac{\text{فاو حار}}{\text{فاو حار}}$

فَاو (حَتَاو-خَاو) جَار

$$\frac{f_a}{f_g} = \frac{f_b}{f_h} - r \frac{f_b}{f_h f_a} + \frac{f_b}{f_a} \frac{f_c}{f_d}$$

$$+ \frac{f_{\text{فاو}}}{f_{\text{فاو}}} \frac{f_{\text{فاو}}}{f_{\text{فاو}}} + \frac{f_{\text{فاو}}}{f_{\text{فاو}}} \frac{f_{\text{فاو}}}{f_{\text{فاو}}} + \dots$$

$$(1) \quad \frac{P_1}{P_2} + \frac{P_2}{P_3} + \frac{P_3}{P_1} = r$$

ولذلك انعوض في أول الأمر منه ، عنه بالتغيبين له ، و بحيث يكون
 منه = لجهار ، و عنه = لجار

أو $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \text{ظا } \theta$ و $\frac{c_2}{c_1} = \text{ظا } \theta$

$$\text{فار} = \frac{\text{سه فاسه} + \text{دو فاسه}}{\text{سه} + \text{دو}} = \text{بهار فاسه} + \text{جار فاسه} \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{فاصلہ}}{2} + \frac{\text{فاصلہ}}{2} = \frac{(\text{سہ فاصلہ} - \text{فاصلہ})}{2} = \text{فاصلہ}$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج $\frac{\text{فاد}}{\text{فاسه}}$ ، $\frac{\text{فال}}{\text{فامه}}$ ، $\frac{\text{فار}}{\text{فاسه}}$ ، $\frac{\text{فار}}{\text{فامه}}$ وينتج

$$(r) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} - \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \\ \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} + \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} = \frac{\text{فاسه}}{\text{فاسه}} \end{array} \right.$$

(١٠٤)

وبإضافة معادلتى (٢) الى بعضهما بعد ضرب الثانية فى $\sqrt{1 - \frac{v}{c}}$ المرموز له بالرمز ϵ يحدث

$$(٣) \quad \left(\frac{v}{c} + \frac{v}{c} \right) = \frac{v}{c} + \frac{v}{c} \quad (\text{ج٢ار} + \text{ع٢ار})$$

ولنرمز بحرف ϵ لمقدار كل من طرفى القانون (٣) بحيث ان هذا القانون يحصل منهما كانت الدالة v ومهما كانت الاشارة التى تعطى للجذر ϵ فيمكن تعويض v بالمقدار ϵ والكيفية ϵ بالكيفية ϵ - وحينئذ يكون

$$(٤) \quad \left(\frac{v}{c} - \frac{v}{c} \right) = \frac{v}{c} - \frac{v}{c} \quad (\text{ج٢ار} - \text{ع٢ار})$$

ومن المتساوية

$$\frac{v}{c} + \frac{v}{c} = \epsilon$$

يتج أن

$$\frac{v}{c} + \frac{v}{c} = \frac{v}{c} - \frac{v}{c}$$

ومن المتساوية

$$(\text{ج٢ار} + \text{ع٢ار}) = \epsilon$$

يتصل

$$\left(\frac{v}{c} - \frac{v}{c} \right) = \left(\frac{v}{c} - \frac{v}{c} \right)$$

وحيث يكون

$$(٥) \quad \frac{v}{c} + \frac{v}{c} = \frac{v}{c} + \frac{v}{c}$$

واذن يكون

$$(٦) \quad \frac{v}{c} + \frac{v}{c} = \frac{v}{c} + \frac{v}{c}$$

ولاجل

* (١٠٠) *

ولاجل تقييم المحل يعوض المتغيران $د$ و $ع$ بالمتغيرين الجديدين $هـ$ و $و$ المرتبطين بالمتغيرين المذكورين بالمعادلتين

$$ع = هـ - جتاو \quad و = ل - هـ جاو$$

فإذا عوض $هـ$ و $و$ في القانون (٥) بالمتغيرات $ع$ و $د$ و $هـ$ و $و$ على التناظر يحدث

$$\frac{ف_{اع}}{ف_{ع}} + \frac{ف_{ال}}{ف_{ل}} = \frac{ف_{اه}}{ف_{هـ}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{ف_{ل}}{ف_{ل}} + \frac{ف_{و}}{ف_{و}}$$

وإذا أجرى نفس هذا التغيير في القانونين (٢) يحدث

$$\frac{ف_{او}}{ف_{و}} = \frac{ف_{اه}}{ف_{هـ}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} - \frac{ف_{او}}{ف_{و}}$$

وحينئذ إذا وضع هذان المقداران في القانون (٦) وعوض أيضا $د$ بما يساويه وهو $هـ جاو$ يحدث

$$ص = \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{ف_{اه}}{ف_{هـ}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} - \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}}$$

وإذا ضرب المحدثان الأولان من هذا المقدار في $هـ$ تحدث المشتقة $ف_{اه}$ وإذا ضرب المحدثان الآخرين في $هـ جاو$ توجد المشتقة

$$\frac{\left(\frac{ف_{او}}{ف_{و}} \right) ف_{او}}{ف_{و}}$$

وحينئذ يكون

$$ص = \frac{ف_{اه}}{ف_{هـ}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{ف_{او}}{ف_{و}} - \frac{ف_{او}}{ف_{و}} + \frac{\left(\frac{ف_{او}}{ف_{و}} \right) ف_{او}}{ف_{و}}$$

وغالبا يكون الأنسب جعل

$$جتاو = ف$$

متغيرا بدلا عن $و$ وإذا كان يكون

$$\frac{\text{فان}}{\text{فان}} = \frac{\text{فان}}{\text{فان}} = \frac{\text{فان}}{\text{فان}}$$
$$\frac{f_2}{f_1} (1 - f_1) = \frac{f_2}{f_1}$$
$$\frac{\left(\frac{\text{جاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا} \left(\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا} \left(\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا}}{\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}} = \frac{\left(\frac{\text{جاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا} \left(\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا} \left(\frac{\text{فاو}}{\text{فاو}}\right) \text{فا}}{\text{فاو}}$$
$$\frac{f_{12}}{f_{11}} \frac{f_{11}}{f_{12}} + \frac{f_{12}}{f_{11}} \frac{1}{f_{11}} + \frac{f_{12}}{f_{11}} \frac{f_{11}}{f_{12}} = \sqrt{2}$$

بـ ٩٩ إذا أريد تغيير المتغير الأصلي والمتغيرات الغير المتعلقة فان الطريقة اللازمة اتباعها هي عين المتقدمة . فلنفرض انه أدخل في حساب ما متغير z وان هذا المتغير دالة لمتغيرات غير متعلقة عددها m ولكن s, e, c, \dots ويراد أن تكون كمية أجري ط دالة لمتغيرات جديدة عددها m ولكن s, k, r, l, \dots فينبذ بلزم ايجاد مقادير المشتقات الجزئية

$$\dots, \frac{v_1^2}{\text{فاصله فاصله}}, \frac{v_2^2}{\text{فاصله}}, \dots, \frac{v_3}{\text{فاصله}}, \frac{v_4}{\text{فاصله}}$$

$$\dots, \frac{\text{ط}}{\text{ط ك}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط ع}}, \dots, \frac{\text{ط}}{\text{ط ك}}, \frac{\text{ط}}{\text{ط ع}}$$

دوائی

(١٠٨)

ويمكن تعيين قي دقي و... و... بدلالة المتغيرات ط و ع، وك ذلك و...
 ويحصل بقوانين (٢) على المقادير المطلوبة للمشتقات $\frac{\text{فاط}}{\text{فاسه}}$ و $\frac{\text{فاط}}{\text{فامه}}$ و...
 ولأجل تعيين المشتقات التي برتبة ثانية يكفي أخذ تفاضل المعادلات (٢) مثلا لنعتبر
 المعادلة الاولى من الجملة (٢) ولناخذ تفاضلا الكلي ثم نعوض فاط $\frac{\text{فاط}}{\text{فاسه}}$ بمقدارها وهو

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فاسه}} + \frac{\text{فاط}}{\text{فاسه فامه}} + \frac{\text{فاط}}{\text{فاسه فاع}} + \dots$$

ثم نعوض فاط ، فاط فاع ، فاط فاك و...
 فاط فاع فاك

بمقاديرها المتناظرة وهي

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}} + \frac{\text{فاط}}{\text{فاك فاع}} + \dots$$

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فامه}} + \frac{\text{فاط}}{\text{فامه فاع}} + \dots$$

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فامه فاك}} + \frac{\text{فاط}}{\text{فامه فاك فاع}} + \dots$$

.....

ثم نعوض فاع و فاك و... بالمقادير المستخرجة من القوانين (١) فتكون
 المعادلة المتحصلة بهذه الكيفية حاصلة الوقوع. وهما كانت التفاضلات الباقية فامه
 و فامه فاع و... وبناء على ذلك نقول الى معادلات أخرى عددها م بهاته-لم
 مقادير المشتقات الجزئية التي عددها م وهي

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فاسه}} , \frac{\text{فاط}}{\text{فاسه فامه}} , \frac{\text{فاط}}{\text{فاسه فاع}} , \dots$$

وبهذه الكيفية تستنتج مقادير المشتقات الاخرى التي برتبة ثانية وهي

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فامه فاع}} , \frac{\text{فاط}}{\text{فامه فاك فاع}} , \dots$$

ومن

* (١٠٩) *

ومن الواضح ان المشتقات ذات الرتب التالية تحصل باتباع هذه الطريقة
ثم انه سهل التحقيق من انه يمكن تطبيق الطريقة المتقدمة في الحالة التي تعتبر فيها
متغيرات متعلقة عددها جيشا تفوق مهما كان عدد المتغيرات الغير المتعلقة

* (في تحويل لوجاندر) *

بمثال قد استعمل لوجاندر في بعض مسائل تحويل لا مفيدا غالباً لانه هنا مقتصرين
على الحالة التي تعتبر فيها متغيران غير متعلقين فنقول

لتكن x دالة للمتغيرين الغير المتعلقين u, v ولنفرض ان تفاضل x هو

$$(1) \quad dx = u \, du + v \, dv$$

وان تفاضلي u, v هما

$$(2) \quad \begin{cases} du = u \, du + v \, dv \\ dv = u \, du + v \, dv \end{cases}$$

فاذا وضعنا

$$(3) \quad u = u \, du + v \, dv$$

يكون

$$u = (u \, du + v \, dv) + (u \, du + v \, dv) = 2(u \, du + v \, dv) \quad (1)$$

$$(4) \quad u = u \, du + v \, dv$$

وهذا اذا كانت القوانين (٢) بالنسبة الى u, v فاصه يحدث

$$(5) \quad \begin{cases} u = \frac{u}{u-v} + \frac{v}{u-v} \\ v = \frac{u}{u-v} + \frac{v}{u-v} \end{cases}$$

ويقتصر تحويل لوجاندر في جعل u, v متغيرات بدلا عن u, v وجعل u, v متغيرين غير متعلقين وحينئذ يتبين من القانون (٤) ان u, v هما المشتقتان الجزئيتان للتغير x بالنسبة الى u, v على التناظر وحينئذ يكون

$$(6) \quad \frac{u}{u} = \frac{v}{v} = 1$$

(١١٠)

ثم انه يبين من القوانين (٥) ان $\frac{r}{\omega - r}$ و $\frac{r}{\omega - r}$ و $\frac{\omega}{\omega - r}$ هي مقادير المشتقات الجزئية وهي

$$\frac{\text{فاسه}}{\text{فاح}} \text{ و } \frac{\text{فاسه}}{\text{فاك}} \text{ و } \frac{\text{فاسه}}{\text{فاح}}$$

وحيث يكون

$$(٧) \quad \frac{\text{فاح}}{\omega - r} = \frac{\text{فاح}}{\text{فاك}} \text{ و } \frac{r}{\omega - r} = \frac{\text{فاح}}{\text{فاك}} \text{ و } \frac{\omega}{\omega - r} = \frac{\text{فاح}}{\text{فاك}}$$

ومن هنا يتج أن

$$(٨) \quad \frac{1}{\omega - r} = \left(\frac{\text{فاح}}{\text{فاك}} \right) - \frac{\text{فاح}}{\text{فاك}} \cdot \frac{\text{فاح}}{\text{فاح}}$$

فبقوانين (٧) و (٨) تعلم ω و r و r بدلالة مشتقات ω بالنسبة إلى ω و r

بذلك فاذا اريد جعل ω و r متغيرين غير متعلقين يكون التفاضلان الكليان للمتغيرين ω و r المستخرجان من القوانين (٢) هما

$$\text{فاسه} = \frac{1}{r} \text{ فاح} - \frac{\omega}{r} \text{ فاسه}$$

$$\text{فاك} = \frac{r}{\omega - r} \text{ فاح} - \frac{\omega}{r} \text{ فاسه}$$

ثم انه بقوانين (١) و (٤) يعلم التفاضلان الكليان فاح و فاك وبواسطة القانون الثاني من القوانين المتقدمين يوجد ان

$$\frac{\text{فاك}}{\text{فاسه}} = \frac{r}{\omega - r}$$

بفرض ω و r متغيرين غير متعلقين وحيث اذا كان الفرق $\omega - r$ معـدوداً على الدوام يكون

$$= \frac{\text{فاك}}{\text{فاسه}}$$

ومن

* (١١١) *

ومن هنا يتضح ان ك لا تتعلق بالتغير سـ وحيث ان تكون هذه الكمية دالة للتغير
الواحد ح وفي هذه الحالة لا يمكن جعل الكيتين ح و ك متغيرين غير متعلقين
ولا يمكن استعمال قوانين لوجاندر

(الباب الثاني)

في التطبيقات التحليلية لحساب التفاضل

(الفصل الاول)

في متسلسلي تيلاور ومكلوران

في متسلسلة تيلاور

بمسند متسلسلة تيلاور التي اعتبرنا من سابقا بـ Δ أساسا لحساب التفاضل تقتصر في تحليل دالة مثل Δ (س) الى تتابع من الحدود المرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة التصاعدية لازيادة Δ التي تعطى للتغير Δ ولنتصدي لايجاد هذه المتسلسلة فنقول
لتكن Δ و Δ^2 و Δ^3 و ... معاملات القوى المختلفة لازيادة Δ فيكون

$$\Delta$$
 (س) = $\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \dots + \Delta^n + \dots$ (ب)

وطريقة ايجاد هذه المعاملات التي هي دوال للتغير Δ مؤسسة على هذه النظرية وهي
بمسند اذا فرض أن Δ دالة للمجموع Δ الذي هو مجموع متغيرين غير متعلقين
 Δ و Δ^2 و Δ^3 و ... فبذلك المجموع بحرف Δ توجد المعادلة

$$\Delta$$
 (س) = Δ (س)

فاذا اخذنا مشتقة الدالة Δ بالنسبة الى Δ تكون هذه المشتقة هي

$$\frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{\Delta}{\Delta}$$

* (١١٣) *

وإذا اخذنا مشتقة الدالة المذكورة بالنسبة إلى φ يوجد أن هذه المشتقة هي

$$\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} \times \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$$

لكن من المساوية $\varphi + \varphi = \varphi$ يوجد أن

$$1 = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} \quad \text{و} \quad 1 = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$$

وحيث كانت هاتان المشتقتان مساويتين للواحد فينتج من ذلك أن

$$\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$$

ومن هنا تنتج هذه النظرية وهي

إذا كانت دالة مثل φ دالة لمجموع متغيرين غير مرتعقلين وليكونا φ و φ تكون المشتقتان الجزئيتان لهذه الدالة بالنسبة لكل من المتغيرين مقساويتين وبالعكس إذا حدثت المتطابقة

$$\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$$

تكون الدالة φ دالة للمجموع $\varphi + \varphi$ الذي هو مجموع المتغيرين الغير المتعلقين لأنه على الدوام يكون

$$\varphi_{\varphi} = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} + \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$$

وحيث إذا كان $\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$ يكون

$$\varphi_{\varphi} = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} (\varphi + \varphi) = \frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi} [\varphi (\varphi + \varphi)]$$

وبالتأمل يرى أن المشتقة $\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$ لا تكون معدومة على الدوام لأنها لو كانت معدومة

على الدوام تكون المشتقة $\frac{\varphi_{\varphi}}{\varphi}$ معدومة على الدوام أيضا وتصبح الدالة φ كمية ثابتة

وحيث نلاحظ أن يكون $\varphi = \varphi$ يلزم ويمكن أن يكون $\varphi (\varphi + \varphi) = \varphi$ أي

(١١٤)

ان s و $s + د$ يكونان في آن واحد كيتين ثابتين بمعنى ان s تكون دالة للمجموع $s + د$

بأنخذ مثالان - الاول لتكن الدالة

$$s = جاسه جتا د + جاد جتاسه$$

ولناخذ المشتقة بالنسبة للتغير s فنجد أن

$$\frac{فا s}{فاس} = جتاسه جتا د - جاسه جاد$$

واذا أخذنا المشتقة بالنسبة للتغير $د$ فنجد أن

$$\frac{فا s}{فاد} = - جاسه جاد + جتاسه جتا د$$

وحيث ان هاتين المشتقتين متساويتان فتكون الدالة s دالة للمجموع $s + د$

ولاجل تعيين تلك الدالة نجعل $د = ٠$ فنجد أن

$$s = (س) = جاسه$$

ولاجل تمثيل $s = (س + د)$ يكفي تعويض s في $s = (س)$ بالمجموع $s + د$ وحينئذ تكون

$$s = جا (س + د)$$

الثاني لتكن

$$s = (س + د) = \frac{ظاسه + ظاد}{١ - ظاسه ظاد}$$

دالة متجانسة للتغيرين s و $د$

فبأخذ المشتقة بالنسبة الى s نجد

$$\frac{فا s}{فاس} = \frac{\frac{١}{جتاسه} (١ - ظاسه ظاد) + \frac{١}{جتاسه} (ظاسه + ظاد)}{(١ - ظاسه ظاد)^2}$$

$$= \frac{١ + ظاد^2}{جتاسه (١ - ظاسه ظاد)^2} = \frac{١}{جتاسه حاد (١ - ظاسه ظاد)^2}$$

وحيث كانت هذه الدالة متجانسة كذلك بالنسبة للتغيرين $د$ و s فبأخذ المشتقة بالنسبة

* (١١٥) *

بالنسبة الى Δ يوجدان $\frac{فا}{فا} = \frac{فا}{فا}$ وحينئذ تكون الدالة Δ دالة للجموع

Δ وحقبة هي ظل المجموع Δ الذي هو مجموع المتغيرين Δ و Δ
 بمبدأ وهذه هي النظرية التي نتخذها أساسا لاجل ايجاد قانون تحليل Δ (Δ و Δ)
 ولجل تحصيله نأخذ المعادلة التي كتبناها سابقا وهي

$$\Delta (\Delta + \Delta) = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \dots \quad (ب)$$

ونكون مشتقي الدالة Δ بالنسبة الى Δ والى Δ فنجدان

$$\Delta \frac{فا}{فا} = \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \Delta + \dots + \Delta^{-1} \Delta$$

$$\frac{فا}{فا} = \frac{فا}{فا} + \frac{فا}{فا} + \frac{فا}{فا} + \frac{فا}{فا} + \frac{فا}{فا} + \frac{فا}{فا} + \dots + \frac{فا}{فا} \Delta^{-1}$$

وبموجب النظرية المتقدمة تكون هاتان المشتقتان متساويتين مهما كان Δ و Δ
 وحينئذ اذا ساوينا معاملات القوى المختلفة للمتغير Δ ببعضها نجدان

$$\Delta = \frac{فا}{فا} \Delta$$

$$\Delta = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta \times 1} = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta} = \frac{فا}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta \times \Delta \times 1} = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta^2} = \frac{فا}{\Delta^2}$$

.....

$$\Delta = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta \times \dots \times \Delta \times 1} = \frac{فا}{فا} \frac{1}{\Delta^{\Delta}} = \frac{فا}{\Delta^{\Delta}}$$

فاذا عوضنا المعاملات المختلفة الداخلة في متسلسلة (ب) بالابتداء من المعامل Δ بمقاديرها

بدلالة Δ نحصل

• (١١٦) •

$$s = (s + \gamma) = \gamma + \frac{\gamma}{\gamma + s} + \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} + \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} + \dots$$

$$\dots + \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} + \dots$$

ولم يبق علينا الا تعيين مقدار γ ولذلك نفرض ان $\gamma = s$ فيكون

$$\gamma = s$$

وحينئذ يكون

$$s = (s + \gamma) = s + s = 2s$$

$$\dots + \frac{\gamma}{\gamma + s} + \frac{\gamma}{\gamma + s} \frac{\gamma}{\gamma + s} + \dots$$

وهذه هي متسلسلة تيلور التي ما يتوصل اليها بتفصيل $s = (s + \gamma)$ وحيث كان عدد الحدود لا نهائيا (ما لم تكن $s = (s + \gamma)$) فن الواضح ان هذه المتسلسلة لا يمكن ان تدل على الدالة المفروضة الا اذا كانت تقاربية

ومتى حلت أي دالة بهذه الصيغة ووقف التفصيل بالحد الذي رتبته s لزم لاجل تفصيل المقدار الحقيقي للتفصيل ان يضاف لمجموع هذه الحدود التي عددها s كمية تسمى باقيا أو حدا مكلا ولنتصدى للبحث عن هذه الكمية فنقول

في مقدار الحد المكمل

بتأييد الطريقة التي نملكها لاجل البحث عن مقدار الحد المكمل مؤسسه على هذه النظرية وهي

اذا فرضنا ان $s = (s + \gamma)$ دالة للتغير وان هذه الدالة تبقى مستمرة ومشتقة اذا فرضنا ان $s = (s + \gamma)$ بالابتداء من المقدار $s = \gamma$ الى المقدار $s = \gamma + \gamma$ وفرضنا ان $s = (s + \gamma)$

أقول انه يجب ان تتعدم المشتقة $s = (s + \gamma)$ بمقدار محصور بين s و $s + \gamma$

لان الدالة المستمرة $s = (s + \gamma)$ لا يمكن ان تأخذ مديارين متساويين مطابقيين للقدارين

* (١١٧) *

ع = ك ، د = ل الا اذا كانت قيمتا بين هذين المقدارين متزايدة ومتناقصة بالتعاقب ولهذا يقتضى ان تتغير اشارة مشتقتها بمقدار محصور بين المقدارين ع = ك ، د = ل وحيث انها مستمرة فيجب ان تمر بالصفر وهما اوردنا بيانه
بشكل ١٠٧ ولاجل البحث عن الحد المثل كل نضع

$$د(س+د) = د(س) + د(د) + (س) \frac{1}{2} + (س) \frac{1}{2} + \dots$$

$$(ب) \quad \frac{1}{2} + (س) \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-د) \dots 2 \times 1} +$$

ونفرض ان الدالة د(س) ومشتقاتها المتتالية الى المشتقة برتبة د مستمرة بالنسبة الى س بالابتداء من المقدار س الى المقدار س+د ثم نجعل

$$\frac{د}{د} = \frac{د}{د}$$

وحرف ع ثابت اقل مقدار له ١ واكبر مقدار له د ونبحث عن المقدار الذى يلزم اعطاؤه للكمية د وذلك نفرض ان ع متغير يمكن ان يأخذ مقادير مختلفة من ٠ الى د ونضع

$$د(ع) = د(ع) + د(ع) + (ع+د) \frac{1}{2} + (ع+د) \frac{1}{2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{(1-د) \dots 2 \times 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-د) \dots 2 \times 1} + \dots$$

ففى كان ع = ٠ ، تؤل د(ع) بموجب المعادلة (ب) الى د(س+د) ومتى كان ع = د نصير د(ع) مساوية ايضا الى د(س+د) وغير ذلك فانه ينتج بداهة من الشروط المفروضة ان د(ع) ومشتقتها د(ع) تتغيران بكيفية مستمرة بمقادير ع بالابتداء من ع = ٠ الى ع = د وبناء على ما نقرر في شكل ١٠٧ تنعدم المشتقة د(ع) بمقدار تتغير ع محصور بين ٠ ، د وهذا المقدار وان كان مجهولا الا انه يمكن الدلالة عليه بالكمية د (حرف د رمز لكمية محصورة بين الصفر والواحد) وحيث نذكر ان

$$د(د) = ٠$$

لكن لو اخذنا مشتقة د(ع) وحذفنا الحدود التى يحوي بعضها بعضا وجد ان

*(118)

$$z_1^{1-z} (z-z) z^{-(z+1)} \frac{z^{1-z}}{(1-z) \dots z \times 1} = (z) z_1$$

$$\left[z z^{-(z+1)} \frac{z^{1-z}}{(1-z) \dots z \times 1} \right]^{1-z} (z-z) =$$

وحيث ان العامل $(z-z)$ لا يمكن ان يسعدم باي مقدار للتغير z محصور بين 0 و 1 فنسوى العامل الثاني بالصفر بعد ان نعوض فيه z بالقيمة z فيحدث

$$(z-z) \frac{z^{1-z}}{z(1-z) \dots z \times 1} = z_1$$

وحيث يكون مقدار z_1 هو

$$(z-z) \frac{z^{1-z}}{z(1-z) \dots z \times 1} = z_1$$

فاذا تصورنا الآن اننا زدنا z الى ما لا نهاية وفرضنا ان المشتقان لا تزال مستمرة ومال z_1 من الصفر فان المجموع

$$(z-z) \frac{z^{1-z}}{(1-z) \dots z \times 1} + \dots + (z-z) \frac{z^{1-z}}{(1-z) \dots z \times 1}$$

يقرب قربا بالانهاثيان z $(z-z)$ حيث انه لا يخالف z $(z-z)$ الابكية z_1 التي تميل الى الصفر بمعنى ان المتسلسلة الغير المحدودة وهي

$$(z-z) \frac{z^{1-z}}{z+1} + (z-z) \frac{z^{1-z}}{z+1} + \dots$$

تكون تقاربية ويكون مجموعها هو z $(z-z)$ وهذا هو ما تنحصر فيه نظرية تيلور وحيث كان العدد z اختياريا فيفرض عادة مساويا الى 1 ويكون

$$(z-z) \frac{z^{1-z}}{z \times \dots z \times z \times 1} = z_1$$

ويأخذ قانون تيلور هذه الصورة وهي

* (119) *

$$\dots + (s) \frac{s^2}{r \times 1} + (s) s + (s) s = (s + s) s$$

$$(1) \quad \dots + (s) \frac{s^2}{s \times \dots \times 1} + (s) \frac{1-s}{(1-s) \dots \times 1} +$$

بمبدأ تنبؤات - الأول لا يمكن تحليل $s(s+s)$ الى متسلسلة تقاربية مرتبة على حسب القوى الصاعدة الموجبة المساعدة لزيادة s بخلاف متسلسلة تيلور ولا يثبت ذلك نفرض انه يمكن تحليل $s(s+s)$ الى متسلسلة أخرى مخالفة للمتسلسلة تيلور ولتكن

$$\dots + (s) s = (s + s) s = b + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \dots$$

نفرض ان

$$\dots + (s) s = (s + s) s = b + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \dots$$

فيستنتج من ذلك ان

$$\dots + (s) s = (s + s) s = b + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \dots$$

فاذا جعل $s = 0$. تول هذه المتساوية الاخيرة الى $b = s(s)$ فاذا قسمنا الطرفين على s . ثم جعلنا $s = 0$. يوجد ان $p = s(s)$ وبمثل ذلك يوجد ان

$$p = \frac{s^2}{r \times 1} \text{ وهلم جرا}$$

(الثاني) من الضروري لاجل تطبيق متسلسلة تيلور لاجل تحليل دالة معلومة ان يتحقق من ان الحد الممثل s يميل الى الصفر متى صار s لانهايا . وهناك حالة يكون

فيها هذا الشرط مستوفيا وهي التي لا يمكن ان تزيد فيها $s(s)$ مهما كان العدد عن نهاية معلومة باى مقدار يعطى للتغير s بحيث يكون محصورا بين s و $s+s$. لانتاذا فرضنا ان k هو العدد الاكبر من s بواحد يكون

$$\frac{s^2}{s \times \dots \times 1} = \frac{s^2}{(1-s) \dots \times 1} \times \frac{1-s}{1+s} \dots \frac{1-s}{1+k-s} = \frac{s^2}{(1-s) \dots \times 1} \times \frac{1-s}{(1-s) \dots \times 1} \times \frac{1-s}{1+k-s}$$

وحيث ان نهاية العامل الاخير صفروان $\frac{1}{2} > 1$ فتكون نهاية العامل $\frac{2}{2 \times \dots \times 1}$ صفرا متى زاد h الى ما لانهاية وحيث ان $2(س + س)$ لا يمكن ان تزيد عن نهاية معلومة فرضا فيميل الحد المكمل الى الصفر متى زاد h الى ما لانهاية ويمكن استعمال متسلسلة تيلور متى كانت $2(س)$ وجميع مشتقاتها مستمرة ومحدودة بمقادير $س$ المحصورة بين $س$ و $س + س$

وحيث ان $2(س)$ لا يمكن ان تزيد $2(س)$ الى ما لانهاية متى صار h لانهاية أم لا

(الثالث) لا يعلم شيء بخصوص كمية $س$ بخلاف كون هذه الكمية محصورة بين الصفر والواحد ومع ذلك فان قانون الباقي يكفي لاجل معرفة نهايتين للنقط الذي يقع اذا اخذت حدود من المتسلسلة عددها h لاتنا لوفرضنا ان $س$ و $س + س$ هما اصغروا كبير المقادير التي تقر بها الدالة $2(س)$ متى مر المتغير من المقدار $س$ الى المقدار $س + س$ يكون

$$2(س + س) = 2(س) + 2(س)$$

واذن يكون

$$2(س) = 2(س) + 2(س) - 2(س) = 2(س) + 2(س) - 2(س)$$

(الرابع) اذا جعل $2(س) = 1$ في معادلة (١) نحصل

$$2(س) - 2(س) = 2(س) - 2(س) + 2(س)$$

وهذا القانون كبير الاستعمال

(الخامس) قد يصعب بواسطة الصورة المتقدمة للحد المكمل اعتبار ان كان هذا الحد يميل الى الصفر أم لا فيثبت استعمال الصورة الآتية التي نحصل عليها بجعل $2(س) = 1$ في المقدار العمومي السابق فنحسبه وهذه الصورة هي

$$2(س) = \frac{2(س) - 2(س)}{(1 - 2) \dots \times 1} = \frac{2(س) - 2(س)}{(1 - 2) \dots \times 1}$$

بـ ١٠٩ يمكن كتابة قانون تيلور بكميات مختلفة فاذا مرنا بحرف $س$ لدا فتكون

• (٢٢١) •

د (س) وفرضنا ان ك هي الزيادة التي تزيد بها الدالة متى غير س بالكيفه س + د
فأخذنا المعادلة (١) هذه الصورة وهي

$$(٢) \left\{ \begin{aligned} & \dots + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \dots \\ & + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \dots \\ & + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{فاسه}} + \dots \end{aligned} \right.$$

في قانون مكوران

اذا جعلنا س = ٠ في قانون (١) المتقدم في ص ١٠٧ ثم كتبنا س بدل د يحدث
القانون

$$(٣) \left\{ \begin{aligned} & \dots + (٠) \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} + (٠) \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} + \dots \\ & + (٠) \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} + (٠) \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} + \dots \end{aligned} \right.$$

وليتنبه دائما الى ان حرف س رمز الكيفه محصورة بين ٠ و ١

وهذا القانون هو قانون مكوران وبه نحصل د (س) الى تتابع من الحدود المرتبة على
حسب القوى التصاعديه للتغير س الا ان ذلك يكون بهذا الشرط البنى ينتج مما تقدم
وهو اولان الدالة ومشتقاتها تكون مستمرة بالمقادير التي تعطى للتغير س بالابتداء
من المقدار س = ٠ الى المقدار س = ١ وانما ان يعمل الباقي

$$\frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}}$$

الى الصفر متى زاد د الى ما لانهاية وهذا الباقي يمكن ايضا وضعه بهذه الصورة

$$(٤) \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{2 \times 1} \frac{1}{\text{س}}$$

التي يتحصل عليها يجعل س = ٠ وابلال د بالتغير س في المقدار (ط) المتقدم
في ص ١٠٨

(١٢٢)

والتنبيهات المختصة بقانون تيلور تطبيق بالضرورة على قانون مكوران أعني مثلاً
لا يمكن إجراء التحليل الألفيغية واحدة وهكذا باقى التنبيهات

فى تطبيقات قانون مكوران

بمثال لنأخذ الدالة $z = (se)$ فىكون

$$z^{(2)} = (se)^{(2)} = (لود)$$

ونكون الدالة وجميع مشتقاتها مستمرة مهما كان se وحينئذ يمكن تطبيق قانون
مكوران ويكون

$$z^{(2)} = 1 + se \cdot لود + \frac{se^2}{2 \times 1} (لود)^2 + \dots + \frac{se^{1-2}}{(1-2) \dots 2 \times 1} (لود)^{1-2}$$

$$+ \frac{se^{2-2}}{2 \times \dots \times 2 \times 1} (لود)^{2-2} +$$

وقد شوهد فى التنبيه الثانى من se^{1-2} ان المقدار

$$\frac{se^{2-2}}{2 \times \dots \times 2 \times 1}$$

يميل الى الصفر متى صار se لانهايا واما العامل se^{2-2} فان مقداره محدود ومحصور

بين ١ و se^{2-2} وحينئذ تكون نهاية الباقي صفرا ويكون

$$z^{(2)} = 1 + \frac{(se \cdot لود)}{1} + \frac{(se \cdot لود)^2}{2 \times 1} + \dots + \frac{(se \cdot لود)^{1-2}}{1 \times 2 \times 1} + \dots$$

مهما كان المقدار الذى يعطى للتغير se

وفى الحالة الخصوصية التى يكون فيها $se = لود$ يكون $z^{(2)} = 1$ ويكون

$$z^{(2)} = 1 + se + \frac{se^2}{2 \times 1} + \frac{se^3}{3 \times 2 \times 1} + \dots + \frac{se^{1-2}}{1 \times 2 \times 1} + \dots$$

بمثال ولنفرض ان $z = (se)$ فسيكون

$$z^{(2)} = (se) = (se + \frac{se^2}{2})$$

وحيث

* (١٢٢) *

وحيث ان هذه المشتقة مستمرة بكل مقدار يعطى الى ∞ ومساوية في النهاية للواحد مهما كان m فيشاهد مباشرة انه يمكن دائما تطبيق متسلسلة مكلوران وبها يكون

$$حاشية = m - \frac{m^2}{2 \times 2 \times 1} + \frac{m^3}{6 \times 2 \times 2 \times 1} - \frac{m^4}{24 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} + \dots$$

والباقي بعد الحد المحتوى على $m^{1-\infty}$ هو

$$\left(\frac{m^3}{6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} + \dots \right) m = \left(\frac{m^2}{2} + m + \dots \right) m$$

وبادالة مشابهة يوجد ان

$$حاشية = 1 - \frac{m^2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} + \frac{m^3}{6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} - \frac{m^4}{24 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1} + \dots$$

مهما كان المقدار الذي يعطى للتغير m

بـ ١٢٢ اذا وافاجعلنا $z = (m+1)$ فلو نجد ان

$$z = (m+1) = \frac{1}{z} , \quad z = (m) = \frac{1}{z} - (m) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} , \dots$$

$$\frac{(1-m) \dots 2 \times 1}{2} (1-m) = (m) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

وجميع هذه المشتقات تكون مستمرة اذا كان $m < 1$ وحيث يمكن تطبيق قانون مكلوران ويكون

$$لو (m+1) = m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} - \frac{m^4}{24} + \dots - \frac{m^{1-\infty}}{2} + \dots$$

وباستعمال الصورة الثانية للباقي m يكون

$$\frac{m^{1-\infty}}{2} + \dots = \frac{(1-m)^2}{2} + \dots = \frac{(1-m)^2}{2} + \dots$$

ولاجل ان تكون المتسلسلة تقاربية يقتضى في اول الامر ان يكون المقدار المطلق لنهاية النسبة

$$\left[\frac{m}{2} (1-m) - \dots \right]$$

* (١٢٤) *

الواقعة بين الحد الذي رتبته h والحد السابق له اقل من الواحد ولذا يقتضى ان يكون

$$h = (1 - r)$$

فاذا كان $h < 0$ و $r > 1$ يكون مقدار العامل $\frac{r}{1+r}$ محدودا واقل من h ويكون

$$h < \frac{r}{1+r} < h$$

وحيث ان تكون نهاية

$$\left(\frac{r}{1+r} \right)^{1-h}$$

صفرا متى صار h لانها لا تكون نهائيا ويكون نهائيا $h = 0$ اذا كان

$$1 - r > 0$$

فاذا جعل $h = 0$ يكون

$$r = \frac{1}{1+r} \cdot \left(\frac{1}{1+r} \right)^{1-h}$$

فالعامل الاول مقداره محدودا وصغره من $\frac{1}{1+r}$ والعامل الثانى يعيل الى الصفر متى مال

$\frac{1}{1+r}$ الى الصفر اذ ان $\frac{1}{1+r} < 1$ دائما من وحيث ان تكون نهاية r صفرا ايضا

ويعلم من ذلك انه بكل مقدار يعطى للتغير h بحيث يكون محصورا بين $1 - r$ و $1 + r$

يمكن تحليل الدالة المفروضة الى متسلسلة تقاربية بواسطة قانون مكلوران ويكون

$$f(1+r) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} - \frac{h^4}{24} + \dots$$

في القوانين المختصة بحساب اللوغاريتمات

نستعمل حساب اللوغاريتمات النيرانية - متى كانت الكمية h محصورة

بين $1 - r$ و $1 + r$ يحدث القانونان

$$f(1+r) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} - \frac{h^4}{24} + \dots \quad (1)$$

أو

(١٢٥)

$$(٢) \quad \dots - \frac{٢}{١} - \frac{٣}{٢} - \frac{٤}{٣} - \dots$$

الاذان فانهما يتحصل من اولهما بتغيير المتغير ٢ بالمتغير ٣ - ٢
فاذا طرح ثانياهما من اولهما يحدث

$$(٣) \quad \dots + \frac{١}{١} + \frac{٢}{٢} + \frac{٣}{٣} + \dots$$

ولنجعل $٢ = \frac{١}{٢}$ في القانون (١) فبذلك يكون

$$\text{لو } (١+٢) = \text{لو } (٢+٣) - \text{لو } ٢ \text{ ويكون}$$

$$(٤) \quad \dots - \frac{٢}{٢} + \frac{٣}{٣} - \frac{٤}{٤} = \text{لو } ٢$$

ثم لنجعل في القانون (٢)

$$\frac{٢}{٢+٣} = \frac{١}{٢} \text{ فيكون } \frac{٢}{٢+٣} = \frac{١}{٢}$$

ويحدث

$$\text{لو } (٢+٣) - \text{لو } ٢$$

$$(٥) \quad \left\{ \dots + \frac{٢}{(٢+٣)^٥} + \frac{٣}{(٢+٣)^٣} + \frac{٤}{(٢+٣)^٢} \right\} ٢ =$$

فالقانونان (٤) و (٥) يمكن استعمالهما لاجل حساب اللوغاريتمات النيبيرية لعدد
 $٢+٣$ متى كان لوغاريتم ٢ معلوما والمتسلسلتان المنحصرتان في هذين القانونين
تكونان تقاربتين جدافتي كان ٢ عظيميا بالنسبة للعدد ٢ وفي الحالة الخصوصية
التي يكون فيها $١ = ٢$ يكون

$$(٦) \quad \dots - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \text{لو } (١+٢)$$

$$\text{لو } (١+٢) - \text{لو } ٢$$

$$(٧) \quad \left\{ \dots + \frac{١}{(١+٢)^٥} + \frac{١}{(١+٢)^٣} + \frac{١}{١+٢} \right\} ٢ =$$

بمعاد مقاييس اللوغاريتمات المعتادة - من المعلوم

لَوْمَةٌ
لَوْمَةٌ
هـ = ١٠

لَوْ مَهْ = لَوْ مَهْ ١٠

(A) $\frac{1}{1.0}$

مکون

فيعلم من ذلك انه يفصل على اللوغاريتمات المعتادة بضرب اللوغاريتمات النيرانية في العدد الثابت م الذي يسمى مقياس اللوغاريتمات وبواسطة القوانين المتقدمة في البند السابق يمكن حساب م لانه اذا جعل $v=1$ في القانون (٧) حدث

(9) $\left(\dots + \frac{1}{r \times 9} + \frac{1}{r \times v} + \frac{1}{r \times 6} + \frac{1}{r \times r} + \frac{1}{r} \right) r = r_0$
 وإذا جعل $r = 8$ في القانون (9) يحدث

(١٠) $\left(\dots + \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{9} \right) 2 + 2 \log 2 = 1.0$
وعلى موجب القوانين (٨) ، (٩) ، (١٠) يحدث

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \left(\dots + \frac{1}{r \times 0} + \frac{1}{r \times r} + \frac{1}{r} \right) r = \frac{1}{r} \\ \left(\dots + \frac{1}{q \times 0} + \frac{1}{q \times r} + \frac{1}{q} \right) r + \end{array} \right.$$

فأذا حسب كل حرد من القانون (١١) مشتملا على ثمانية وعشرين خانة أعشارية

[illegible]

$$(12), 2, 3, 2, 0, 8, 0, 9, 2, 9, 9, 2, 0, 2, 0, 7, 1, 2, 1, 7, 9, 9, 1, 2, \dots = \frac{1}{2}$$

$$(12) \quad \dots, 23229, 22819, \dots, 2201, 8276, 11289, \dots =$$

* (١٢٧) *

١٥١ حساب اللوغاريتمات المعتادة — يمكن استعمال القانونين (٤) و (٥) لاجل حساب اللوغاريتمات المعتادة اذا ضرب طرفاهما الثنايان في المقياس م واذن يكون

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{لو} (صه + د) - \text{لو} صه = م \left(\dots - \frac{1}{صه^3} + \frac{1}{صه^2} - \frac{1}{صه} \right) \\ \text{لو} (صه + د) - \text{لو} صه = م^2 \left(\dots + \frac{1}{(د+صه^2)^3} + \frac{1}{د+صه^2} \right) \end{array} \right.$$

واذا جعل د = ١ يحدث

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \text{لو} (صه + ١) - \text{لو} صه = م \left(\dots - \frac{1}{صه^3} + \frac{1}{صه^2} - \frac{1}{صه} \right) \\ \text{لو} (صه + ١) - \text{لو} صه = م^2 \left(\dots + \frac{1}{(١+صه^2)^3} + \frac{1}{١+صه^2} \right) \end{array} \right.$$

وحيث كان المقياس م معلوما فيمكن استعمال القانونين (١٤) و (١٥) لاجل حساب اللوغاريتمات المعتادة

في قانون ذات الحدين باس حيثما اتفق

بطلد لنفرض ان المطلوب تحليل (د+ز) في الحالة التي يكون فيها حرف م دالا على عدد حيثما اتفق ولذلك نضع $\frac{ز}{د} = صه$ فيكون

$$(د+ز)^م = [د(صه+١)]^م = د^م (صه+١)^م$$

وحيث نؤمل المسئلة الى تحليل (صه+١) ولاجل تفصيل هذا التحليل الاخير نضع

$$صه = (صه+١) - ١$$

وحيث ان المشتقات

$$د^م (صه+١)^م = د^م (صه+١)^{م-1} (١-صه) = د^م (صه+١)^{م-1} (١-صه) \dots$$

$$د^م (صه+١)^{م-2} (١-صه)^2 \dots$$

* (١٢٨) *

تكون مستمرة مادام $s > 1$ فيكون

$$(1+s)^2 = 1 + s + \frac{s^2}{2 \times 1} + \frac{s^3}{3 \times 1} + \dots$$

$$+ \frac{s^4}{4 \times 1} + \dots + \frac{s^m(1-s)(1-s)^2 \dots (1-s)^{m-1}}{(1-s) \dots 2 \times 1} + \dots$$

ولاجل ان تكون هذه التسلسلة تقاربية يلزم ان تقل النسبة $\frac{s^m(1-s)^m}{s^{m-1}(1-s)^{m-1}}$ الى نهاية
يكون مقدارها الرقى اقل من الواحد ولهذا يقتضى ان يكون s محصور بين $1 -$
و $1 +$ وحينئذ يمكن اعتبار هذه الحالة
واذا استعملت الصورة الثانية للباقي يكون

$$\frac{s^m(1-s)^m}{(1-s) \dots 2 \times 1} = \frac{s^m(1-s)^m}{(1-s)^m} \cdot \frac{1}{(1-s)^m} \cdot \frac{1}{(1-s)^m} \dots$$

فالعامل الاول يعيد الى الصفر متى صار s لانهايا اذ ان التسلسلة التي حدها العوى
 $\frac{s^m(1-s)^m}{(1-s)^m}$ تقاربية كما يمكن تحقيقه بدون صعوبة
 $(1-s)^m$

بشرط ان يكون $s > 1$ والعامل الثانى وهو $\frac{1}{(1-s)^m}$ مقداره محدود حيث
كان $s > 1$ على حسب ما فرضنا والعامل الثالث وهو $\frac{1}{(1-s)^m}$ اقل
من الواحد لانه اذا كان $s > 1$ يكون $1 < s < 1 +$ واذا كان
 $s < 1$ يكون $s < 1$ (وحرف ل ر عدد محصور بين $1 -$ و $1 +$) وحينئذ يكون
 $s < 1 < 1 +$ وحينئذ في كلتي الحالتين يكون

$$1 < \frac{s}{1-s} < 1 +$$

وحيث كان الباقي s مركبا من ثلاث عوامل احدها نهايته صفرا ولا يزيد العاملان
الاخران الى ما لانهما فتكون نهايته صفرا وحينئذ يمكن تطبيق متسلسلة مكالور ان
أقنى انه باى مقدار للتغير s محصور بين $1 -$ و $1 +$ ومهما كان m يكن

$$(1+s)^2 = 1 + s + \frac{s^2}{2 \times 1} + \frac{s^3}{3 \times 1} + \dots + \frac{s^m(1-s)^m}{m \times (m-1) \times \dots \times 2 \times 1} + \dots$$

واما

* (١٢٩) *

وأما إذا كان المقدار المطلق للتغير سب أ كبر من الواحد فإن النسب تسلسل تكون تباعدية
وحينئذ لا يمكن تطبيق متسلسلة (ع) ما لم يكن م صحيحا وموجبا لانه في هذه الحالة
تكون المشتقة برتبة م + ١ للدالة (١ + س) معدومة ويكون الباقي م + ١ معدوما
أيضا وتصل الدالة (١ + س) بموجب قانون مكلوران الى كمية كثيرة الحدود محتوية
على حدود عددها م + ١ وتكون هذه الكمية مرتبة على حسب القوى التصاعدية
للتغير س

* (تمرينات) *

الاول قوس جا س = س + $\frac{س^3}{3!} + \frac{س^5}{5!} + \frac{س^7}{7!} + \dots$

الثاني هـ س جتا هـ س = ١ + $\frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} + \frac{س^6}{6!} + \dots$

وفي هذا المثال = قوس طا $\frac{س}{e}$

الثالث (قوس جاسه) = $٢ = \frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} + \frac{س^6}{6!} + \dots$

الفصل الثاني

في المقدار الحقيقي للذوال التي توجد بصورة يتبين

منها ان مقدارها غير معين

ب ١٧ المقدار الحقيقي للذال من هذا القبيل هو المقدار الذي تأخذه على حسب
قانون الاستقرار فهو النهاية التي تميل اليها هذه الدالة متى مال المتغير الى المقدار الذي به
تصير غير معينة في الظاهر

والصور الثبيرة التي بها يكون مقدار الدالة غير معين في الظاهر هي

÷ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty \times 0$ و 1^∞ و :

وانبدا بالصورة الاولى التي يمكن ايلولة الصور الاخرى اليها نقول
بـ ١١٨ لنفرض ان ∞ كما يؤل الى الصورة ÷ حينما يكون المتغير $s = \infty$ ففي
بعض الاحوال يمكن تحصيل المقدار الحقيقي بواسطة اعتبارات جبرية مثلا لنعتبر
الكسر $\frac{v}{u}$ الذي حده u و v كيتان كبيرتا الحدود هيجتان بالنسبة
للتغير s فاذا آل هذا الكسر الى الصورة ÷ ففي اخذ المتغير s مقدارا مخصوصا
وليكن k يكون حده هذا الكسر قابلا للقسمة في آن واحد على $s - k$ ويمكن
ان يكتب

$$(1) \quad \frac{v}{u} = \frac{(s-k)^m \left(\frac{v}{s^m} - \frac{u}{s^{m+1}} \right)}{(s-k)^m} = \frac{v}{s} - \frac{u}{s^2} + \dots$$

وهناك ثلاث حالات الاولى ان يكون $m < 0$ والثانية ان يكون $m = 0$ والثالثة
ان يكون $m > 0$

(الحالة الاولى) اذا كان $m < 0$ فان ذات المحدثين $s - k$ تكون مرفوعة الى قوة
موجبة في المعادلة (١) وتبقى البسط بحيث انه متى جعل $s = k$ يكون $\frac{v}{u} = 0$.

(الحالة الثانية) اذا كان $m = 0$ فان العامل $s - k$ ينحصر من حدى الكسر
ويكون $\frac{v}{u} = \frac{v}{u}$

(الحالة الثالثة) اذا كان $m > 0$ يؤل قانون (١) الى

$$\frac{v}{u} = \frac{1}{(s-k)^m} + \frac{v_1}{s} + \frac{v_2}{s^2} + \dots$$

ومتى جعل $s = k$ يكون $\frac{v}{u} = \frac{1}{(k-k)^m}$ ويكون مقدار الدالة ∞ لانها
بـ ١١٩ يمكن الوصول الى نتيجة أبسط وأهم بتحليل حدى الكسر بواسطة متسلسلة

تيلور وتطبيق القاعدة التي يتوصل اليها على الدوال العالية بشرط انه يمكن تطبيق
متسلسلة تيلور على الدوال العالية المفروضة

فلنفرض انه حينما يكون $s = k$ يأخذ الكسر

$$\frac{v(s)}{u(s)} = \frac{v(s)}{u(s)}$$

* (١٣١) *

الصورة بـ [د (سه) د ر (سه) دالتان حيثما اتفق] فيمكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$\frac{[د (سه) + د (ك)] د}{[د (سه) + د (ك)] د} = \text{سه}$$

واذا حللنا حدى هذا الكسر بواسطة قانون تيلور معتبرين سه ك الزيادة التى تعطى للتغير ك يكون

$$(ن) \quad \frac{\dots + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د}}{\dots + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د}} = \text{سه}$$

ويكون مقدار سه خارج قسمة مقسلةين على بعضهما وحيث ان د (سه) د ر (سه) تنعدمان فرضا متى جعل سه ك فيكون د (ك) = . د ر (ك) = . وحيث ان يمكن قسمة د على الكسر على سه ك وبهذا يكون

$$\frac{\dots + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د}}{\dots + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د} + د (ك) د \frac{د (سه) - د (ك)}{د}} = \text{سه}$$

واذا جعلنا سه ك يكون المقدار الحقيقى هو

$$\frac{د (ك) د}{د (ك) د} = \text{سه}$$

ما لم يكن

$$د (ك) د = . د ر (ك) د$$

فى آن واحد فان وقعت هذه الحالة يوجد سه أيضا بالصورة بـ فاذا رجعنا الى القانون (ف) نرى ان معاملى (سه ك) ينعدمان من حدى الكسر وكذلك تنعدم الكيتان الثابتان ويكون حد الكسر قابلا للقسمة على (سه ك) فاذا اجريت عملية القسمة ثم جعل سه ك يكون المقدار الحقيقى المطلوب هو

* (١٣٢) *

$$\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}} = \text{صه}$$

وأيضا إذا كان

$$\overline{s}^{(k)} = 0 \text{ و } \overline{s}_1^{(k)} = 0$$

يشاهد كذلك أنه يجب أن يكون المقدار الحقيقي هو

$$\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}}$$

وهلم جرا ومن هنا نتج هذه القاعدة وهي

المقدار الحقيقي لأي كسر يوجد بالصورة $\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}}$ حينما يعطى للتغير المقدار $\overline{s}^{(k)}$ يساوي النسبة بين المقدارين اللذين تأخذهما أول مشتقتين برتبة واحدة لا تنعدمان في آن واحد حينما يجعل $\overline{s}^{(k)} = 0$

ويمكن أن يقال إن المقدار الحقيقي يساوي النسبة بين المشتقتين برتبة أولى لمحدى الكسر المفروض وذلك بالاصطلاح على تطبيق هذه القاعدة على الكسر الجديد المستخرج إذا وجد أيضا بالصورة $\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}}$

بنفسه ولنطبق هذه القاعدة على بعض أمثلة فنقول

(الاول) المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للكسر $\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}}$ حينما يجعل $\overline{s}^{(k)} = 0$.

فلحل هذه المسألة نعلم أن النسبة بين المشتقتين هي

$$\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}} = \text{جئاسه}$$

وهي تساوي الواحد حينما يكون $\overline{s}^{(k)} = 0$. فاذن يكون المقدار الحقيقي المطلوب هو الواحد

(الثاني) المراد تعيين المقدار الحقيقي للدالة $\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}}$ حينما يكون $\overline{s}^{(k)} = 0$.
فالنسبة بين المشتقتين هي

$$\frac{\overline{s}^{(k)}}{\overline{s}_1^{(k)}} = \text{جئاسه}$$

وهي تساوي $\frac{1}{1}$ أي الوحدة حينما يجعل $\overline{s}^{(k)} = 0$.

*(الصورة)

(133)

(الصورة ∞)

بما إذا اعتبر كسرا يوجد بالصورة ∞ فيمثل مشاهدة ان هذه الحالة لا تخالف الحالة المتقدمة اذا ان

$$\frac{\frac{1}{(s)}_1}{\frac{1}{(s)}_s} = \frac{(s)}{(s)}_1$$

فاذا وجد الكسر الاول بالصورة ∞ حينما يجعل s مساويا لمقدار مخصوص يعطى للتغير s يوجد الكسر الثاني بالصورة ∞ متى جعل s مساويا للمقدار المذكور وحينئذ يمكن تطبيق القاعدة المتقدمة على الكسر الثاني وبناء على ذلك يكون المقدار الحقيقي هو مقدار الكسر

$$\frac{(s)}{(s)}_1 \times \frac{r[(s)]_s}{r[(s)]_1} = \frac{r[(s)]_s}{r[(s)]_1}$$

فاذا جعل $s = k$ في الكسر اعتبر بول الى (k) وحيث ان مقداره مبين بالطرف

الثاني من المعادلة السابقة فيكون

$$\frac{(k)}{(k)}_1 \times \frac{r[(k)]_k}{r[(k)]_1} = \frac{(k)}{(k)}_1$$

وبحذف العامل المشترك في الطرفين يحدث

$$\frac{(k)}{(k)}_1 \times \frac{(k)}{(k)}_1 = 1$$

ومن هنا يحدث

* (١٣٤) *

$$\frac{(ك)س}{(ك)س} = \frac{(ك)س}{(ك)س}$$

وحينئذ اوجد الكسر بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فلا فائدة في التحويل الى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ حيث ان المقدار الحقيقي يتصل أيضا بأخذ النسبة بين المشتقتين

بـ ١٣٢ مثال — ليكن المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للدالة $\frac{\cos x}{x}$ حينما يجعل

$\frac{\infty}{\infty}$ فلذلك نأخذ النسبة بين المشتقتين فنجد ان هذه النسبة هي

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

ومنى جعل $\frac{\infty}{\infty}$ تكون هذه النسبة مساوية للصفر بـ ١٣٣ الصور الأخرى يمكن تحويلها الى الصورتين السابقتين فننتصدي مثلا للصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فنقول

ليكن الحاصل $\frac{\infty}{\infty}$ الذي يوجد بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ حينما يكون $\frac{\infty}{\infty}$ فيكون

$$\frac{(\frac{\infty}{\infty})}{(\frac{1}{x})} = (\frac{\infty}{\infty}) \cdot (\frac{1}{x})$$

ونقول حينئذ الى احدى الصورتين السابقتين وهما $\frac{\infty}{\infty}$ بـ ١٣٤ ولم يبق علينا الا الكلام على الصورتين $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ وهاتان الصورتان تحولان بواسطة الاوغاريتمات الى الصورة التي تقدمت في البند السابق فلنفرض انه اذا جعل $\frac{\infty}{\infty}$ يوجد المقدار الجبري

$$(\frac{\infty}{\infty}) \cdot (\frac{1}{x})$$

بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ او بالصورة : فباخذ الاوغاريتم النيرباني يوجد الحاصل

$$(\frac{\infty}{\infty}) \cdot (\frac{1}{x})$$

وهذا

* (١٣٥) *

وهذا المحاصل بأخذ الصورة $\infty \times$. اذا كانت $\infty = (ك)$ و $\infty = (ك)$ و $\infty = (ك)$ و $\infty = (ك)$ وهي حالة يكون

فيها $\infty = (ك)$

وفي كلتا الحالتين نقول الى صورة سببق الكلام عليها ومتى تحصل المقدار الحقيقي للمحصل $\infty = (ك)$ و $\infty = (ك)$ يلزم لاجل تحصيل المقدار الحقيقي للدالة المفروضة ان يبحث عن العدد المطابق لهذا الاوغاريتم

مثلا لنكن $\infty = (ج تاسه)$ وليكن المطلوب البحث عن المقدار الحقيقي لهذه الدالة حينما يكون $\infty =$

فلذلك نأخذ الاوغاريتم التير ياني للطرفين فيحدث

$$\frac{\text{لوج تاسه}}{\text{طاسه}} = \frac{\text{لوج تاسه}}{\text{طاسه}}$$

فاذا جعل $\infty =$ يكون جتا $\infty = 1$ ويكون لوج تاسه $\infty =$ و طاسه $\infty =$ وحينئذ يوجد هذا المقدار الجبري الاخير بالصورة $\frac{1}{\infty}$ فتؤخذ النسبة بين المشتقتين فيكون

$$\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{\infty}$$

فاذا جعل $\infty =$ يكون هذا المقدار الجبري معدوما واذن يكون المقدار المطلوب مقدار الوغاريتم معدوم واذن فهو الواحد تنبيه - كان يمكن ايضا ان يوضع

$$\frac{\text{طاسه}}{\text{لوج تاسه}} = \frac{\text{طاسه}}{\text{لوج تاسه}}$$

والوصول الى الصورة ∞ وكان يتوصل الى الناتج بعينه بأخذ النسبة بين المشتقتين الان هاتين المشتقتين أقل بساعة منه حافي الحالة الاولى

* (١٣٩) *

* مسائل متنوعة *

بـ ٢٠ الد المطلوب إيجاد المقدار الحقيقي للدالة $\frac{x^2}{x^2-1}$ حينما يجعل $x=0$ (عدد صحيح موجب)

فالنسبة بين المشتقتين اللتين بترتبة أولى وهى

$$\frac{x^2}{1-x^2}$$

تؤول كالكسر المفروض الى $\frac{\infty}{\infty}$ متى جعل $x=0$ فاذا أخذنا النسبة بين مشتقتي المحددين يحدث

$$\frac{x^2}{x^2(1-x^2)}$$

وهذا الكسر المجدد يتؤول كالكسر المفروض الى $\frac{\infty}{\infty}$ متى جعل $x=0$ وبـ تكرار هذه العملية يتوصل أخيراً الى هذه النسبة

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots (1-x^2)$$

الواقعة بين المشتقتين اللتين بمحددى الكسر المفروض وهذه النسبة تؤول الى ∞ حينما يكون $x=0$ لأنها باءا واذن يكون المقدار الحقيقى المجهول عنه لانها باءا بـ ٢٠ الد المطلوب إيجاد المقدار الحقيقى للكسر

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{2}$$

حينما يكون $x=0$ معدوما

فلذلك نقول حيث انه متى كان $x=0$ يوجد الكسر المفروض بالصورة $\frac{x^2}{x^2-1}$ فنأخذ

النسبة بين مشتقتى حديه بالنسبة الى x وهى $\frac{x^2}{x^2-1}$ ثم نجعل $x=0$ فيها فتؤول

الى $\frac{0}{-1}$ وهى نتيجة معلومة قد اتخذناها تعريفاً للمشتقة

ولنبعث عن المقدار الحقيقى للكسر

(١٣٧)

$$\frac{(س)س + (س+٢)س٢ - (س+٢)س}{٢}$$

حينما يجعل \Rightarrow فنقول

بالبحث عن النسبة بين مشتقي حديه بالنسبة الى $س$ توجد انها

$$\frac{(س)س - (س+٢)س}{٢} = \frac{(س)س٢ - ٢ \times (س+٢)س}{٢}$$

فاذا جعل \Rightarrow يوجد هذا الكسر الجديد كالكسر المفروض بالصورة \Rightarrow وجئنا
بإلزام تكرار العملية وبذلك يحدث

$$\frac{(س)س - ٢ \times (س+٢)س}{١}$$

وهذا الكسر يؤل الى $س(س)$ حينما يجعل \Rightarrow . وهي نتيجة معلومة أيضا
و يمثل ذلك بشاهد بالسهولة ان المقدار الحقيقي للكسر

$$\frac{(س)س - (س+٢)س٢ + (س+٢)س٣ - (س+٢)س}{٣}$$

حينما يجعل \Rightarrow هو $س(س)$ وهلم جرا

الفصل الثالث

في قانوني نيولور ومكولوران للدوال ذات المتغيرات المتعددة

بـ ١٢٧. لتكن $z = f(x, y, z, \dots)$ دالة ذات متغيرات غير متعلقة عددها m وتلك x, y, z, \dots ولتقصد تحليل الدالة

$z = f(x, y, z, \dots)$ الى متسلسلة مرتبة على حسب القوى التصاعدية الموجبة للزيادات x, y, z, \dots ولذلك نعلم ان السكبة $z = f(x, y, z, \dots)$ هي المقدار التي تأخذها هذه الدالة

$z = f(x, y, z, \dots)$ التي هي دالة للمتغير r حيثما يجعل $r = 1$ وهذه الدالة يتحصل عليها بتعويض x, y, z, \dots بالاقادير x, y, z, \dots على التناظر في مقدار $z = f(x, y, z, \dots)$ ويعلم من ذلك انه لاجل حل المسئلة المفروضة يكفي تحليل z الى متسلسلة مرتبة على حسب قوى r بموجب قانون مكولوران ثم جعل $r = 1$ في النتائج فانما جعلنا

يكون

$$z = f(x, y, z, \dots)$$

واذن يكون

$$z = f(x, y, z, \dots) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

وحيث ان x, y, z, \dots دوال خطية للمتغير r الغير المتعلق فيموجب ما تقر في ٧٦. يكون

$$z = f(x, y, z, \dots) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$$

مهما كان

(١٤٠)

وحيث أن $فاد = فار$, $فاس = ك فار$, $فاع = ز فار$, ... فيكون

$$\left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{ك فاس} + \frac{فاد}{فاد} \right) = \frac{فاد}{فار}$$

ولسكون أن $\frac{فاد}{فاد} = \frac{فاد}{فاس} = \dots$ فيمكن أن يكتب

$$\left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{فاس} + \frac{فاد}{فاس} \right) = \frac{فاد}{فار}$$

وحيثما يكون $ر = ٠$ يكون

$$v = v$$

ويؤمل القانون السابق الى

$$\left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{فاس} + \frac{فاد}{فاس} \right) = \frac{فاد}{فار}$$

وحيثما بتطبيق قانون مكلوران على الدالة v يحدث

$$\left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{فاس} + \frac{فاد}{فاس} \right) + v = v$$

$$\dots + \left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{فاس} + \frac{فاد}{فاس} \right) \times ٢١ +$$

$$+ \left(\dots + \frac{فاد}{فاع} + \frac{فاد}{فاس} + \frac{فاد}{فاس} \right) \frac{١-٥}{(١-٥) \dots \times ٢١} +$$

والباقي v يساوى حاصل ضرب $\frac{١}{٥ \dots \times ٢١}$ في المقدار الذي تأخذه المشتقة

$\frac{فاد}{فار}$ متى عوض $ر$ فيها بالقيمة ٥ التي فيها ٥ رمز لقيمة محصورة بين ٠ و ١

وحيثما يكون

(١٤٢)

ويعبر عن مقدار الباقي هو

$$\frac{1}{x \dots r x} \left[\frac{x^r}{x^r - 1} + \frac{x^{r-1}}{x^r - 1} + \dots + \frac{x}{x^r - 1} + \frac{1}{x^r - 1} \right] x$$

ومنى مال الباقي x الى الصفر حينما يزداد x الى ما لا نهاية يؤل قانون (١) الى

$$(٢) \left\{ \begin{aligned} & \dots + \frac{x^r}{x^r - 1} + \frac{x^{r-1}}{x^r - 1} + \dots + \frac{x}{x^r - 1} + \frac{1}{x^r - 1} = 0 \\ & \dots + \frac{\left(\dots + \frac{x^r}{x^r - 1} + \frac{x^{r-1}}{x^r - 1} + \dots + \frac{x}{x^r - 1} + \frac{1}{x^r - 1} \right)}{r x^{r-1}} + \dots \end{aligned} \right.$$

وهو قانون تبلور للدوال ذات المتغيرات المتعددة

وحيث كانت s و v و c و \dots متغيرات غير متعلقة فيكون

$$x^r = \frac{x^r}{x^r - 1} + \frac{x^{r-1}}{x^r - 1} + \dots + \frac{x}{x^r - 1} + \frac{1}{x^r - 1}$$

ويكون

$$\left(\dots + \frac{x^r}{x^r - 1} + \frac{x^{r-1}}{x^r - 1} + \dots + \frac{x}{x^r - 1} + \frac{1}{x^r - 1} \right) = x^r$$

وحيث يمكن كتابة قانون (٢) هكذا

$$(٤) \dots + \frac{x^r}{r x^{r-1}} + \frac{x^{r-1}}{r x^{r-1}} + \dots + \frac{x}{r x^{r-1}} + \frac{1}{r x^{r-1}} = 0$$

وتكون صورته كالحالة الدوال ذات المتغير الواحد

بـ ١٢٨ اذا لوحظت الشروط التي يجب استيفائها لاجل صحة قانون مكلوران في حالة

الدوال ذات المتغير الواحد يعلم ان قانون (١) يستلزم ان تكون الدالة v ومشتقاتها

الجزئية لغاية المشتقات برتبة $s-1$ مستمرة بالقسمة لكل من المتغيرات مادامت

هذه

(١٤٣)

هذه المتغيرات محصورة على التناظرين $س، د، هـ، و، ح، ز$... ويستلزم خلاف ذلك أن توجد المشتقات الجزئية برتبة ٥ بصورة معينة

ومتى كانت الزيادةات $د، ز، و، ح، و$... صغيرة جدًا وبقيت النسب الواقعة بينها غير معينة فإن النسبة الكائنة بين الباقي والحد الموقوف به القانون تكون كمية صغيرة جدًا بشرط أن لا يكون هذا الحد الأخير معدوماً لأنه حيث كانت المشتقات الجزئية للدالة ٧ مفروضة مستمرة لغاية المشتقات الجزئية التي برتبة $٥-١$ فيكون

$$\frac{\frac{١-٥}{٧}}{\frac{٧}{١-٥}} = ١-٥$$

والرمز ٧ رمز لما يؤخذ إليه التفاضل $١-٥$ ٧ متى عوضت فيه المتغيرات $س، د، هـ، و، ح، ز$... بالكلمات $س+د، د+هـ، هـ+و، و+ح، ح+ز$... على التناظر وغير ذلك يعلم أن

$$\frac{١-٥}{٧} + \frac{\frac{١-٥}{٧}}{(١-٥) \dots ٢ \times ١} = ١-٥$$

واذن يكون

$$\frac{\frac{١-٥}{٧} - \frac{١-٥}{٧}}{\frac{١-٥}{٧}} = \frac{\frac{١-٥}{٧}}{\frac{١-٥}{٧} \dots ٢ \times ١}$$

فيشاهد ان الطرف الثاني من هذا القانون يميل الى الصفر حينما تقبل الزيادةات $د، ز، و، ح، و$... اليه مادامت نهايات نسب هذه الكميات الصغيرة جدًا الى احدها غير معينة ولم يكن $١-٥$ معدوماً

ونفج من ذلك انه اذا كانت المقادير المطلقة للزيادةات $د، ز، و، ح، و$... صغيرة صفراً كافيًا، يكون المقدار المطلق للباقي ٧ أقل من المقدار المطلق للحد الأخير

$$\frac{\frac{١-٥}{٧}}{٥ \times \dots ٢ \times ١}$$

بـ $١-٥$ ولاجل تحصيل قانون مذكور ان للدوال ذات المتغيرات المتعددة نفرض انعدام

• (١٤٤) •

سه و صه و ع ، ... في القانونين (١) و (٢) ثم نكتب سه ، صه و ع ، ...
بدل د ، ك ، ل ، ... على التناظر فيكون

$$(٥) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\dots + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاع}}\right) \text{ع} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهصه}}\right) \text{صه} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهسه}}\right) \text{سه}}{1} + \frac{\text{و}}{\text{و}} = \text{و} \\ \frac{\left[\dots + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاع}}\right) \text{ع} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهصه}}\right) \text{صه} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهسه}}\right) \text{سه} \right]}{2 \times 1} + \\ \dots + \\ \frac{\left[\dots + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاع}}\right) \text{ع} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهصه}}\right) \text{صه} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهسه}}\right) \text{سه} \right]}{(1-2) \dots 2 \times 1} + \end{array} \right.$$

ويكون

$$(٦) \left[\dots + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاع}}\right) \text{ع} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهصه}}\right) \text{صه} + \left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاهسه}}\right) \text{سه} \right] \frac{1}{2 \times \dots 2 \times 1} = \text{و}$$

والصفر الفرنساوى الموضوع تحت كل دالة يستدل به على انه يجب تعويض المتغيرات
سه و صه و ع ، ... بالصفر وحرف ٤ الموضوع تحت الدوال الداخلة في قانون
الباقى يستدل به على وجوب تعويض المتغيرات المذكورة بالكميات سه و صه و ع ، ...

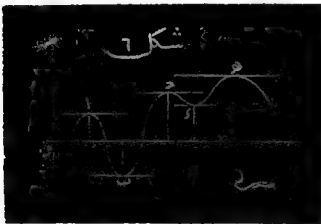


الفصل الرابع في النهاية الكبرى والنهية الصغرى

في النهاية الكبرى والنهية الصغرى للدوال
ذات المتغير الواحد الغير المتعلق

بـ ١٣١. لنكن s دالة ذات متغير واحد وهو s فاذا زيد s وأخذت الدالة مقداراً حقيقياً أكبر من المقادير السابقة له مباشرة والتابعة له مباشرة يقال لهذا المقدار نهاية كبرى للدالة ويسمى نهاية صغرى للدالة المذكورة كل مقدار لهذه الدالة أصغر من المقادير السابقة والتالية له مباشرة ويؤخذ من هذا التعريف أنه إذا صارت الدالة s نهاية كبرى حينما يكون $s = K$ يكون الفرق $s - (K + \epsilon)$ ϵ سالباً هـ ما كانت إشارة ϵ بشرط أن يؤخذ ϵ صغيراً قدر ما يراد وأن هذا الفرق يكون موجباً إذا كانت s نهاية صغرى

بـ ١٣٢. يمكن أن يكون للدالة جملة نهايات كبرى وجملة نهايات صغرى يعقب بعضها بعضها وقد تكون نهاية كبرى أقل من نهاية صغرى وكل نهاية كبرى سالبة تصير نهاية صغرى إذا صرف النظر عن إشارتها وكذا إذا صرف النظر عن إشارة أي نهاية صغرى



سالبة فإن هذه النهاية الصغرى تصير نهاية كبرى وتضع هذه النتائج المستنبطة من التعريف بأسماء النظر في المعنى الجبري أبجده (شكل ٦) فلتكن $s = K$

معادلة هذا المعنى

فنوضح أن النهايات الكبرى والنهايات الصغرى هي راسيات النقاط a b c

و... التي فيها المماس مواز لمحور السينات ويشاهد ان رأسى نقطة ا الذي هو نهاية
كبرى أقل من رأسى نقطة د الذي هو نهاية صغرى وان رأسى نقطة ب الذي يكون
نهاية كبرى اذا اعتبر مقدارها المطلق فقط يكون نهاية صغرى اذا أخذنا إشارة

١٤٤ من المعلوم ان الدالة د (س) تأخذ في الازدياد بدون انقطاع متى زيد س
زمنًا ما وبقيت المشتقة د' (س) موجبة وان د (س) تأخذ في النقص مادامت المشتقة
سالبة وينتج من ذلك ان د (س) لا تصير نهاية كبرى ولا نهاية صغرى مادامت المشتقة
حافضة لاشارة واحدة متى أخذ س في الازدياد لكن اذا تغيرت اشارة المشتقة متى وصل
س الى مقدار ما وليكن ك وزاد عنه فان الدالة د (س) تصير نهاية كبرى بهذا المقدار
اذا مرت المشتقة من الايجاب الى السلب ونهاية صغرى اذا مرت المشتقة من السلب الى
الايجاب ومن المعلوم ان هذه المشتقة لا يمكن ان تتغير اشارة الا اذا مرت بالصفر أو
صارت غير مسطرة أو لانهاية ويعلم من ذلك ان مقادير س التي تجعل د (س) نهاية
كبرى أو نهاية صغرى هي المقادير التي بها تصير المشتقة د' (س) معدومة أو لانهاية
أو غير مسطرة حينما تتغير اشارة

بـ ١٤٣ عادة تطابق النهاية الكبرى والنهاية الصغرى الى مقادير لتغير س بها تتغير
اشارة المشتقة حينما تمر بالصفر مع انها محدودة ومسطرة وفي هذه الحالة يمكن بيان
شروط النهاية الكبرى والنهاية الصغرى بواسطة متسلسلة تيلور وذلك لان

$$d(1+s) = d(s) = d(s) + 1$$

فاذا كانت د (س) غير معدومة تكون اشارة الفرق د (س) + 1 - د (س) عين
اشارة د (س) وحينئذ تتغير اشارة د (س) الفرق اذا تغيرت اشارة د (س) ويعلم من ذلك
ان د (س) لا تكون في هذه الحالة نهاية كبرى ولا نهاية صغرى بمقدار س الذي
لا يعدم د (س)

لكن اذا كانت د (س) معدومة ولم تكن د (س) معدومة يكون

$$d(1+s) = d(s) = \frac{d^2}{dx^2} + 1$$

وحينئذ هما كانت اشارة د تكون اشارة الفرق د (س) + 1 - د (س) عين اشارة
د (س) وحينئذ اذا كانت د (س) موجبة بمقدار س المعتبر الذي يعبر عنه د (س)
تكون د (س) نهاية صغرى واذا كانت د (س) سالبة تكون د (س) نهاية كبرى

لكن

* (١٤٨) *

$$س(س) = لو(س) = س(س)$$

$$س(س) = ١ + لو(س) \quad و \quad س(س) = \frac{١}{س}$$

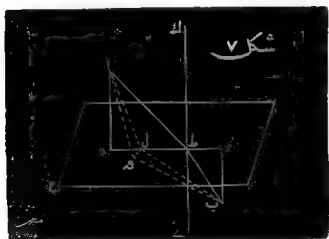
فيكون
فاذا وضعنا

$$١ + لو(س) = ١ \quad و \quad يكون \quad س(س) = ١$$

(هـ اساس نيير) ولم يبق علينا الا معرفة ان كانت $س(س) = \frac{١}{س}$ أو $لو(س) = \frac{١}{س}$ أو $س(س) = \frac{١}{س}$ نهاية كبرى أو نهاية صغرى ولذلك نعلم ان

$$س(س) = \frac{١}{س} < ٥$$

وستنتج من ذلك ان للدالة $س(س)$ نهاية صغرى تطابق للحد $س(س) = \frac{١}{٥}$
نماذج المسئلة الثانية — المعادومتان ١ و ٢ (شكل ٧) موجودتان



في وسطين مختلفين منفصلين من بعضهما بسطح مستو وهو ح وهناك متحرك يتحرك في الوسط الاول بسرعة منتظمة قدرها ع وفي الوسط الثاني بسرعة منتظمة قدرها ع ويراد معرفة الطريق اطب الذي يجب أن يتبعه هذا المتحرك لانتقاله من ا الى ب

في اقصر زمن فن الواضح أن هذا الطريق يجب أن يكون مركبا من خطين مستقيمين ولتثبت على أن الخط المنكسر الحال للمسئلة يجب أن يكون موجودا في المستوى ا ب و المار بالعمودين ا و ب على المستوى ح ولذلك نفرض أن هذا الخط هو ا ب وانه يقابل المستوى ح في نقطة د الغير الموجودة في المستوى ا ب و ثم نخذ د و عمودا على ح ونوصل ا د و ب د حيث كان المثلثان ا ب د و ب د د قائمي الزاوية في د فيكون الدح ا د و ب د ح وحيث أن يكون سيرا المتحرك من ا الى ب اذا تبع الطريق ا ب د أسرع من سيره اذا تبع الطريق ا ب و حيث أن لنبحث في المستوى ا ب و العمود على المستوى ح من المستقيم ا ب د الذي يقطعه المتحرك في أقرب وقت ممكن ولذلك نفرض ان

* (١٤٩) *

ا ح ب و س د ح و ط د س و ط ح د س ب

فيكون الزمن الذي يستغرقه المتحرك في سيره من ا الى ط هو

$$\bullet \frac{\sqrt{ط^2 + س^2}}{ع} = \frac{ا ط}{ع}$$

ويكون الزمن الذي يستغرقه في سيره من ط الى ب هو

$$\frac{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}}{ع} = \frac{ب ط}{ع}$$

وجبت ان تكون الدالة اللازم جعلها نهاية صغرى هي

$$\frac{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}}{ع} + \frac{\sqrt{ط^2 + س^2}}{ع} = (س) د$$

وجبت ان نضع

$$ع(س) = \frac{س}{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}} - \frac{س}{\sqrt{ط^2 + س^2}} \quad \text{أو} \quad ع(س) = \frac{س}{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}} - \frac{س}{\sqrt{ط^2 + س^2}}$$

أو

$$\frac{س}{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}} = \frac{س}{\sqrt{ط^2 + س^2}}$$

فاذا اريد استخراج مقدار س من هذه المعادلة يلزم ترتيبها مع طرفيها وبذلك يتوصل الى حل معادلة بدرجة رابعة لكن حيث ان

$$س = \frac{س}{\sqrt{ط^2 + س^2}} \quad \text{جا د ا ط ك و}$$

$$س = \frac{س}{\sqrt{ط^2 + (س-د)^2}} \quad \text{جا ب ط د}$$

فيشاهد انه في حالة النهاية الصغرى (ومن الواضح انه ليس للدالة د(س) نهاية كبرى) يكون

$$\frac{جا ا ط ك}{جا ب ط د} = ع \quad \text{أو} \quad \frac{جا ا ط ك}{جا ب ط د} = ع$$

* (١٥٠) *

وفي نظرية الضوء تكون الكمية $\frac{c}{v}$ التي هي النسبة بين سرعتي الضوء في الوسطين هي

دليل انكسار الضوء عند مروره من الوسط الاوّل في الثاني

نستلذ المسئلة الثالثة - المطلوب ايجاد النهاية الصغرى للدالة

$$S(\theta) = \sqrt{h^2 + 2} \cos \theta + \sqrt{h^2 + 1}$$

لاجل حل هذه المسئلة نعلم ان

$$S'(\theta) = -2 \sin \theta = 0$$

$$S'(\theta) = -2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$$

فاذا سبق المشتقة $S'(\theta) = 0$ بصفر يكون $\theta = 0$. وهذا المقدار اذا وضع في الدالة

$$S(0) = \sqrt{h^2 + 1}$$

ولاجل معرفة ان كان المقدار $\sqrt{h^2 + 1}$ نهاية كبرى او نهاية صغرى نعوض θ بالصفر

في المشتقة $S'(\theta) = -2 \sin \theta = 0$. فيلزم استهال مشتقات برتب اعلا وحديث ان

$$S''(\theta) = -2 \cos \theta = -2 \cos 0 = -2 < 0$$

$$S''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ هو نقطة عظمى}$$

ويعلم من ذلك ان $S(0) = \sqrt{h^2 + 1}$ نهاية صغرى للدالة $S(\theta)$ المفروضة

نستلذ المسئلة الرابعة - المطلوب ايجاد اصغر بعددين نقطة معاومة م احداثياتها

(x, y) عن منحن معلوم بمعادته وهي

$$(1) \quad y = x^2 + 1$$

لذلك نوصل م (ك نقطة حينما اتفق من المنحنى) فيكون

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

فاذا سبق مشتقة هذا المقدار الجبري بصفر يحدث

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

وهذه المعادلة تؤل الى

$$(2) \quad y = 1$$

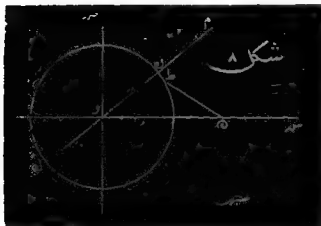
ويتضح

ويضع من هذا الارتباط الواقع بين $\frac{\text{فاصد}}{\text{فاسد}}$ وهي المعامل الزاوي للماس للحنفي في النقطة المعلومة (س د صه) والكمية $\frac{\text{صه}}{\text{س د}}$ التي هي المعامل الزاوي للمستقيم م ك ان هذين المستقيمين متعامدان على بعضهما. ويعلم من ذلك انه يجب ان يكون المستقيم الذي يقاس عليه اصغر بعد قاطعا للحنفي المعلوم على زاوية قائمة فاذا كان البعد م ك قابلا لان يكون نهاية كبرى فانه يحصل عليها أيضا بحمل المعادلتين (١) و (٢)

وانعتبر على الخصوص الدائرة التي معادلتها

$$\begin{aligned} \text{س د} + \text{صه} &= \text{دق} \\ \text{فيثبت ان } \frac{\text{فاصد}}{\text{فاسد}} &= \frac{\text{صه}}{\text{س د}} \text{ ويؤول الارتباط (٢) الى} \\ 1 - \frac{\text{صه}}{\text{س د}} &= \frac{\text{س د}}{\text{صه}} \text{ أو } \text{صه} = \frac{\text{س د}}{2} \\ \text{فيتحصل لاجل تعيين س د صه على المعادلتين} \end{aligned}$$

$$\text{س د} + \text{صه} = \text{دق} \text{ و } \text{صه} = \frac{\text{س د}}{2}$$



التي تبدلان بأحد ههما معاً على نقطتي تقاطع الدائرة المعلومة بالمستقيم م د (شكل ٨) وحينئذ يكون لـ م البعد الاصغر ويكون لـ د البعد الاكبر كما يشاهد بالسهولة باعتبار المشتقات التالية وهناك حالة غريبة يمكن ايضاحها

بواسطة نفس تعريف النهاية الكبرى والنهاية الصغرى وهي لنفرض ان النقطة المعلومة هي نقطة د الموجودة على محور السينات على بعد من المركز يساوي د فيكون مربع البعد د ط مينا بالمقدار الجبري وهو

$$\text{صه} + (\text{س د})^2$$

أو بالمقدار

$$\text{دق} - 2\text{س د} + \text{س د}^2$$

ومشتقة هذا المقدار الجبري كمية ثابتة (٢٠) لا يمكن حينئذ ان تكون مساوية للصفر وبعلم من ذلك انه ولو يوجد بعد أصغر هو $\frac{1}{2}$ الا انه لا يمكن تخصيصه بواسطة طريقتنا وهذا ناشئ من انه بموجب التعريف تكون الدالة نهاية صغرى بمقدار ما للتغير متى تزايدت هذه الدالة بمقادير أكبر وأصغر لهذا المتغير وهنا اذا اعتبر $\frac{1}{2}$ دالة للتغير s لا يكون $\frac{1}{2}$ نهاية صغرى بالمعنى المتقدم حيث ان هذه الدالة الحقيقية بمقادير s الاقل من $\frac{1}{2}$ تصير تخيلية بمقادير s الاكبر من $\frac{1}{2}$

بمسألة السادسة - المطلوب إيجاد النهايات الكبرى والصغرى للدالة

$$s = (s) = s^2 \quad (s) = s^2$$

محل هذه المسألة تأخذ مشتقة s^2 فنجد

$$s^2 = (s) = s^2 \quad (s) = s^2 \quad (s) = s^2$$

$$s^2 = (s) = s^2 \quad (s) = s^2 \quad (s) = s^2$$

وبتقدير ان نضع

$$s^2 = (s) = s^2 \quad (s) = s^2 \quad (s) = s^2$$

ومن هذه المعادلة توجد هذه الثلاثة مقادير وهي

$$s^2 = (s) = s^2 \quad (s) = s^2 \quad (s) = s^2$$

فالمقدار الاول يقابله نهاية كبرى لانه من الواضح ان المشتقة تمر من الايجاب الى السالب متى زاد s عن المقدار $\frac{1}{2}$

واذا كان s زوجيا فانه يقابل المقدار . نهاية صغرى للدالة الا ان هذا يكون فقط في هذه الحالة أعني الحالة التي يكون فيها s زوجيا لانه بجميع المقادير الموجبة أو السالبة القريبة جدا من الصفر يكون عاملا للمشتقة وهما $(s) = s^2$

$s = (s) = s^2$ موجبين دائما بخلاف العامل s^2 فانه يمر من السالب الى الايجاب حيث كان s زوجيا وحينئذ يصير الدالة نهاية صغرى في هذه الحالة وأما

إذا كان م فردا فإن إشارة جميع عوامل المشتقة لا تتغير ولا يكون هناك نهاية كبرى ولا نهاية
صغرى

وكذلك إذا بدأه يكون مطابقا للمقدار ب نهاية صغرى إذا كان د زوجيا وأنه لا يكون
هناك نهاية كبرى ولا نهاية صغرى بالمقدار م = ب إذا كان د فردا

في النهاية الكبرى والنهية الصغرى للدوال الغير محلولة ذات المتغير الواحد الغير متعلق

بمثلة لنفرض أن

$$ص = ٢ - م - م - م + م = ٠$$

معادلة مغسبة للمتغير ص بدلالة م فيمكن إيجاد النهايات الكبرى والنهايات الصغرى
للدالة ص بدون حل هذه المعادلة لانتالوا أخذنا تفاضل هذه المعادلة يحدث

$$٠ = (ص - م - م - م - م) = م - م - م + م = ٠$$

ويكون

$$\frac{٠}{٠} = \frac{٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$$

وحيث أن مقادير م المطابقة لنهايات كبرى وأنهايات صغرى للدالة ص تكون محققة
للارتباط

$$٠ = \frac{٠}{٠}$$

فيحصل على هذه المقادير بحل هاتين المعادلتين

$$ص = ٢ - م - م - م + م = ٠ \quad و \quad م - م - م + م = ٠$$

بالمثل ولنفرض لأجل زيادة التعميم وجود ثلاث معادلات ذات أربعة مجاهيل ولتكن هذه
المعادلات الثلاث هي

$$(١) \quad \begin{cases} ٠ = (ص - م - م - م - م) \\ ٠ = (ص - م - م - م - م) \\ ٠ = (ص - م - م - م - م) \end{cases}$$

(٢٠) تفاضل - أول

فيمكن اعتبار أحد المتغيرات وليكن s مثلاً متغيراً غير متعلق فتتكون الثلاث متغيرات الأخرى
دوال للمتغير المذکور فلتعتبر u على الخصوص فلايجاد مقادير s ومقادير u و v
التي تجعل u نهاية كبرى أو نهاية صغرى يلاحظ أنه في الحالة الاعتيادية لأنها آيات الكبرى
والصغرى يكون

$$0 = \frac{6u}{6s}$$

وبناء على هذا إذا أخذتفاضل المعادلات (١) باعتبار أن u و v دوال للمتغير
 s وحذفت الحدود التي يدخل فيها $\frac{6u}{6s}$ يحدث

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{6u}{6s} \cdot \frac{6}{6} + \frac{6v}{6s} \cdot \frac{6}{6} + \frac{6}{6s} \\ 0 = \frac{6u}{6s} \cdot \frac{1}{6} + \frac{6v}{6s} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6s} \\ 0 = \frac{6u}{6s} \cdot \frac{4}{6} + \frac{6v}{6s} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{6s} \end{array} \right.$$

فإذا حذف $\frac{6u}{6s}$ و $\frac{6v}{6s}$ تحصل معادلة مثل

$$(2) \quad 0 = (u, v, s)$$

إذا أخذت مع المعادلات (١) تحدث مجموعتها تعين مقادير s و u و v

وإذا أخذتفاضل المعادلات (١) مرة ثانية تحصل $\frac{6u}{6s}$ فيوضع فيها المقادير التي

وجدت للمتغيرات s و u و v وبحسب ما تكون $\frac{6u}{6s}$ موجبة أو سالبة

تكون u نهاية صغرى أو نهاية كبرى

ويمكن إجراء حذف $\frac{6u}{6s}$ و $\frac{6v}{6s}$ من المعادلات (٢) بجمع هذه المعادلات على بعضها

من بعد ضربها بالتساوي $1, 2, 3$ وانتخاب $1, 2, 3$ بحيث يكون معامل $\frac{6u}{6s}$ و $\frac{6v}{6s}$

في المعادلة الناتجة معدومين وحينئذ تعوض المعادلات (٢) بهذه

لأنه دلت الدالة ϕ من تقسمها وهو مخالف للفرض الذي فرضناه
 وجب أن نفرض أن ϕ مثلاً غير معدوم فأقول أن $\phi < 0$ لأنه لو وضع $\phi = 0$ لكان
 تولد الدالة إلى الحد ϕ الذي يقتضى لاجل أن يكون موجبا أن يكون $\phi < 0$. وجب أن
 يعلم شرط أول لازم في حالة النهاية الصغرى وهو

$$\phi < 0 \quad (1)$$

ويمكن كتابة ϕ أى الدالة

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8$$

بالصورة

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \left(\frac{\phi_4 + \phi_5}{2} + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8 \right)$$

وبسكامل المربع الذي حداه الأولان بين القوسين يحدث

$$\phi = \left(\frac{\phi_4 + \phi_5}{2} + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8 \right) - \frac{\phi_4^2 + \phi_5^2 + \phi_6^2 + \phi_7^2 + \phi_8^2}{2} + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8$$

$$= \left(\frac{\phi_4 + \phi_5}{2} + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8 \right) + \left(\frac{\phi_4^2}{2} - \phi_4 \right) + \left(\frac{\phi_5^2}{2} - \phi_5 \right) + \left(\frac{\phi_6^2}{2} - \phi_6 \right) + \left(\frac{\phi_7^2}{2} - \phi_7 \right) + \left(\frac{\phi_8^2}{2} - \phi_8 \right)$$

$$+ \left(\frac{\phi_4^2}{2} - \phi_4 \right) + \left(\frac{\phi_5^2}{2} - \phi_5 \right) + \left(\frac{\phi_6^2}{2} - \phi_6 \right) + \left(\frac{\phi_7^2}{2} - \phi_7 \right) + \left(\frac{\phi_8^2}{2} - \phi_8 \right)$$

فإذا جعل لاجل الاختصار

$$\phi_1 = \frac{\phi_4^2}{2} - \phi_4 , \quad \phi_2 = \frac{\phi_5^2}{2} - \phi_5 , \quad \phi_3 = \frac{\phi_6^2}{2} - \phi_6$$

يجب حينئذ أن يجمع مقايير ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 يكون

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \left(\frac{\phi_4 + \phi_5}{2} + \phi_6 + \phi_7 + \phi_8 \right)$$

فإذا لم تكن ϕ معدومة تولد الدالة المعبرة بالمقدار

(١٦٠)

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{2} = 2$$

الى $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$

وهذه الكمية ذات الحدين لا يمكن ان تكون موجبة بجميع مقادير $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ الا اذا كان $\frac{1}{2} = 0$. لكن حيث يمكن وضع $\frac{1}{2}$ انذاك بالصورة

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{2} + 2 \right) \frac{1}{2}$$

فينعدم هذا التفاضل بالمقدار $\frac{1}{2} = 0$. مأخوذا مع مقادير آخرى للكميتين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ لانهاية لعددها وهي حالة خصوصية قد صرفنا النظر عنها فليكن حينئذ $\frac{1}{2}$ و مخالفا للصفر فيجعل

$$\frac{2}{3} = 0, \frac{1}{2} = 0$$

نؤل الدالة الى $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ وحيث انه يجب أن يكون هذا الناتج موجبا بجميع مقادير $\frac{1}{2}$ فيستنتج من ذلك انه يجب أن تكون $\frac{1}{2} < 0$. ومن هنا يعلم شرط ثان لازم في حالة النهاية الصغرى وهو

$$\frac{1}{2} < 0 \quad (2)$$

ثم انه اذا صرف النظر عن الحد الاول يمكن كتابة باقى كثيرة الحدود هكذا

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2}$$

وبتكميل المربع الموجود بين القوسين يحذف

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2}$$

وذلك يجعل

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

(١٦٣)

وفي هذه المعادلات κ ، μ ثابتان وأما λ ، ν فانهما التفاضلان الكليان
للدالتين ν ، κ معتبرتين دالتين للمتغيرين μ ، λ
فاذا حذف λ ، ν من المعادلات (٢) نتحصل معادلة بالصورة

$$\epsilon \kappa + \mu \kappa = 0$$

يجب أن نتحقق في حالة النهاية الكبرى كافي حالة النهاية الصغرى بمقادير μ ، λ المطابقة
وبناء عليه حيث أنه لا علاقة بين κ ، μ فيجب أن يكون

$$(2) \quad \epsilon = 0, \mu = 0$$

فبمعادلات (١)، (٣) نتحصل بمقادير μ ، λ ، ν ، κ المطلوبة ولأجل معرفة
أن كان مقدار الدالة المناظر لهذه المقادير نهاية كبرى أو نهاية صغرى يلزم معرفة أن كان التفاضل
الكلي λ ، ν حافظاً على الدوام لاشارة واحدة أم لا

بـ ١٤٩ وما ذكرناه يتضمن تعيين النهاية الكبرى والصغرى للدوال ذات العتمة متغيرات الغير
متعلقة المرتبطة ببعضها بمعادلات معاومة مثلاً لتكن الدالة

$$u = f(\mu, \lambda, \nu, \kappa)$$

ولنفرض وجود الارتباطات

$$f(\mu, \lambda, \nu, \kappa) = 0 \quad u$$

$$f(\mu, \lambda, \nu, \kappa) = 0$$

فيشاهد أن هذا يرجع الى تغيير μ ، λ ، ν ، κ بالدالة $f(\mu, \lambda, \nu, \kappa) = 0$ و
في المسئلة المتقدمة وفرض أن الدالتين f ، g غير متعلقتين بالمتغير u

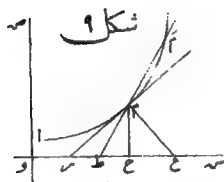
الباب الثالث

في التطبيقات الهندسية لحساب التفاضل

الفصل الأول

في مماسات ومساح واطوال المنحنيات المستوية
النسوبة لاجزاءيات مستقيمة

في معادلتى المماس والعمودى



بذلك لنفرض أن $د (س، صه) = ٠$ معادلة
منحنى مستوي وليكن $أم م$ وليكن $س، صه$
احداثيتي نقطة حيثما اتفق $م$ من هذا المنحنى فإذا فرض
أن $م$ هو المماس في نقطة $م$ وفرض أن المحورين
قائمان يكون

$$\text{طام} = س = \text{نها} = \frac{صه}{صه} = \frac{صه}{صه}$$

وحينئذ إذا رمزنا بالرمزين $س، صه$ للاحداثيين الجاريين لنقطة حيثما اتفق من المماس
تكون معادلة هذا المماس هي

$$(١) \quad \frac{صه}{صه} = \frac{صه}{صه} (س - س)$$

وإذا عوضت $\frac{صه}{صه}$ بمقدارها المستخرج من معادلة المنحنى نؤول معادلة المماس الى

$$\frac{صه}{صه} = \frac{صه}{صه} (س - س)$$

أو

$$(٢) \quad ٠ = \frac{صه}{صه} (س - س) + \frac{صه}{صه} (س - س)$$

(170)

١٥١- معادلة المماس تكون بنفس الصورة المتقدمة متى كان المحوران مائلين لانه اذا فرضنا

أن يصرح أحد اثنائنا بقطعة التماس م من

بما أن m ، n للمنفى am تكون معادلة

المعاصر بالصورة

$$(m - m_1)m = v_2 - v_1$$

وغر حاف أن معادلة القاطع م م ط هي

$$v_1 - v_2 = \bar{m}(v_1 - v_2)$$

وَأَنْ مَّ هُوَ نَهْايَةُ مَّ مَتَى انْطَبَقَتْ نَقْطَةُ مَّ عَلَى نَقْطَةِ مَّ

فأذا رسمنا م ع ر م ع مَ موازين للمعور وصه ورسمنا م ك موازيا للمعور وصه

محدث

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{\sum 1}$$

لكن

مَ لَ = ف ص ه , م لَ = ف س ه

فازدن بكون

$$m = \frac{F_v}{F_h}$$

وينتج من ذلك أن

نہا ف صہ ای م = ۶۶

واذن تكون المعادلة

$$(s - s_1) \frac{v}{v_1} = v - v_1$$

هي في كلتي الحالتين معادلة المماس في النقطة (س، ص)

سواء يعلم بما تقدم انه اذا كان المحوران فائتين تكون معادلة العمودى م ع هي

$$1 - \frac{6}{6} = 0 \quad (1 - 1)$$

وإذا كانا مثلين ومكوّنين بينهما زاوية قدرها θ تكون معادلة هذا المستقيم هي

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

في طول الخطين المسميين تحت المماس وتحت العمودي

بـ ١٥٤. لنفرض الآن الحالة التي يكون فيها المحوران قائمين فإذا أريد معرفة تحت المماس

ثم $z = y$ يعلم أن

$$z = y = \frac{y}{x} x = \frac{y}{x} z$$

وانه يكون

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

ويمكن إيجاد مقدار طول تحت المماس مباشرة باعتبار نهاية تحت القاطع أي نهاية المستقيم z لأن

$$z = y = \frac{y}{x} x = \frac{y}{x} z$$

ونهاية هذه الكمية هي $\frac{y}{x}$

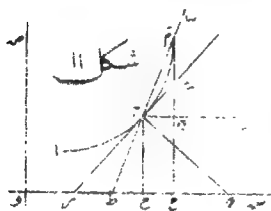
ولايجاد طول تحت العمودي يعلم أنه من مثلث z (شكل ١١) يحدث

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

ويكون طول المماس z هو

$$z = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

ويكون طول العمودي z هو



(١٦٧)

$$\sqrt{\frac{6}{صه} + 1} = 2م$$

مثال — لنفرض المنحنى الذى معادلته

$$صه = م^2$$

ونفرض لاجل ثبات الفكر أن $صه < ١$ فهذا المنحنى المسمى المنحنى اللوغاريتمى ينسد الى
مالانهاية في جهتي محور الصادات ويكون تقريبا محور
السينات جهة السينات السالبة
ومن المعادلة يستخرج

$$\frac{6}{صه} = م^2 - 1$$

ولو $صه$ اللوغاريتم التيريبانى للعدد $صه$ وبناء على ذلك $صه$
تكون معادلة المماس هي

$$صه - صه = م^2 - 1$$

ويمكن رسم هذا المماس بسهولة بواسطة تحت المماس $صه$ لان

$$\frac{1}{صه} \times م^2 = \frac{6}{صه} = م^2 - 1$$

أى ان

$$صه = \frac{1}{صه} = م^2$$

فيعلم من ذلك أن تحت المماس كدالة ثابتة تساوى لوغاريتم $صه$ مأخوذاً فى الجملة التى أسامها $صه$
أى تساوى مودول هذه الجملة وبالنسبة للمنحنى اللوغاريتمى الذى معادلته $صه = م^2$ يكون
المقدار الثابت تحت المماس هو الوحدة

فى درجة معادلة المماس

١٥٤ — معادلة المماس المرسوم من النقطة $(صه, م)$ يمكن وضعها بالصورة

(١٦٨)

$$\frac{٦}{٦صه} + \frac{٦}{٦صه} = \frac{٦}{٦صه} + \frac{٦}{٦صه}$$

فاذا كانت معادلة المنحنى جبرية وبدرجة م يظهر في أول الامر ان $\frac{٦}{٦صه} + \frac{٦}{٦صه}$ تكون دالة بدرجة م بالنسبة لاحداثي نقطة التماس الا أنه يمكن بيان أن هذه الدرجة تنخفض بواحد متى لوحظت المعادلة $د (م, صه) = ٠$

ولبيان ذلك نفرض أن

$$د (م, صه) = ٠ + ١ + ٢ + ٣ + \dots$$

و مجموع الحدود التي بدرجة م، و مجموع الحدود التي بدرجة م - ١ وهم جزأين

$$\frac{٦}{٦صه} = \frac{٦}{٦صه} + \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots$$

$$\frac{٦}{٦صه} = \frac{٦}{٦صه} + \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots$$

واذن يكون

$$\frac{٦}{٦صه} + \frac{٦}{٦صه} = \frac{٦}{٦صه} + \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots + \left(\frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} \right) + \left(\frac{٢}{٦صه} + \frac{٣}{٦صه} \right) + \dots$$

وبموجب نظرية الدوال المتجانسة تول هذه المعادلة الى

$$\frac{٦}{٦صه} + \frac{٦}{٦صه} = \frac{٦}{٦صه} + \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots + \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots$$

$$= \frac{١}{٦صه} + \frac{٢}{٦صه} + \dots$$

لانحنيت كانت النقطة (م, صه) على المنحنى فيكون

$$م = (٠ + ١ + ٢ + ٣ + \dots)$$

وبناء على ذلك تول معادلة المماس الى

(١٧٠)

فإذا كانت $د$ (مسـ ر صه) دالة جذرية صحيحة بدرجة $م$ تكون المعادلة (٢) بدرجة (م-١) وحينئذ يكون للمسئلة المقروضة حلولاً غايةتها $م (١ - م)$ فإذا فرض أن $٢ = م$ تكون غاية عدد المماسات اثنين وتكون هذه الغاية ممتة إذا كان $٣ = م$ وهكذا

وباعتبار المعادلة (٢) وحدها فانها تدل على مسار هندسي محتوى على جميع نقط التماس ويكون هذا المسار بدرجة (م-١) في الغاية
١٥٦ د وقد يطلب إيجاد المماس الموازى استقيم معلوم معادلته $صه = ل$ لـ $صه$ بحيث كانت معادلة المماس المطلوب هي

$$صه - صه = \frac{صه}{صه} (صه - صه)$$

$$ل = \frac{صه}{صه} \quad \text{فيجب أن يكون}$$

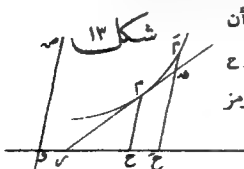
وهذه المعادلة الاخيرة إذا أخذت مع المعادلة $د (صه ر صه) = ٠$ يتعين احداثيا نقطة التماس وحيث أن المعادلة $\frac{صه}{صه} = ل$ تولد الى

$$ل = \frac{\frac{صه}{صه}}{\frac{صه}{صه}} - \text{أولى } \frac{صه}{صه} + ل \frac{صه}{صه} = ٠$$

وكانت هذه المعادلة الاخيرة بدرجة (م-١) اذا كانت الدالة $د (صه ر صه)$ بدرجة $م$ فيكون للمسئلة في الغاية حلولاً عددها $م (١ - م)$

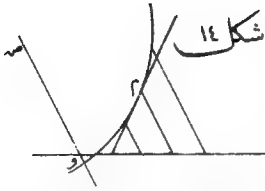
في تقعر وتحديد المنحنيات المستوية

١٥٧ د لنقارن الآن رأسيات منح برأسيات مماسه بالنسبة لافى واحد مجوار نقطة التماس



فليكن $صه$ مماس للمنحنى $م$ الذى نفرض أن معادلته $صه = د (صه ر صه)$ ولنفرض أن $صه = و$ و $صه = م$ هما احداثيا نقطة التماس $م$ فيالرمز للمسافة $و$ بحرف $ح$ يكون

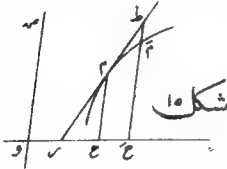
(١٧٢)



شكل ١٤

هذه الزاوية منفرجة وكبر من الزاوية الواقعة بين المماس ومحور السينات كما في شكل ١٤ تكون رأسيات المنحنى في جهتي نقطة م أكبر من رأسيات المماس ومع ذلك فإنه لا يمكن أن يقال أن المنحنى محدد بجهة محور السينات

وفي الحالة الثانية الموضحة بشكل ١٥ يكون المنحنى في جهتي نقطة م موجودا في الزاوية



شكل ١٥

الحادة الواقعة بين المماس $ص$ والمحور $و$ ويقال حينئذ أن المنحنى متغير في نقطة م جهة محور السينات أو أنه يديره تغييره جهة هذا المحور إلا أن المتبانية (٢) لا تدل على هذه النتيجة دلالة شافية إلا إذا كانت زاوية المحورين أقل من 90°

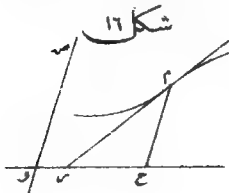
وما ذكرناه هو بفرض أن رأسى نقطة م موجب فإن كانت هذه النقطة تحت محور السينات يشاهد بالسهولة أن المنحنى يكون محددًا بجهة هذا المحور بحسب ما تكون

$$\frac{ص}{و} > ٠ \text{ أو } < ٠$$

والحاصل أنه على حسب ما يكون $ص$ و $\frac{ص}{و}$ متغيرين في الإشارة أو مختلفين فيها يكون المنحنى محددًا أو متغيرًا في نقطة م جهة محور السينات إذا لم تكن الزاوية الواقعة بين الجزأين الموجبين للمحورين أكبر من زاوية قائمة

وفي الحالة التي تكون فيها هذه الزاوية منفرجة تغيير إشارة أحد الاضدادتين فبذلك نصير زاوية الاضداديات الموجبة قائمة ويمكن تطبيق القاعدة المتقدمة

بـ ١٥٨ قد فرضنا إلى الآن أن $\frac{ص}{و}$ تكون بإشارة واحدة. لنسبة للنقط الموجودة في جهتي



شكل ١٦

نقطة م والقرينة منها لا يمكن قديتًا أن $\frac{ص}{و}$ تكون بإشارة عين إشارة $ص$ قبل أن يصير $ص$ مساويًا للبعد $و$ بتمثيل وإشارة مخالفة بعد أن يزيد $ص$ عن هذا المقدار أو يحصل العكس فاذلًا يصير المنحنى المحدب أو المقعر على شمال نقطة م مقعرا

أو محدة بإجهة محور السينات على شمال هذه النقطة وإذا كان يقال أن للمحنى انقلاباً في نقطة م التي يقال لها نقطة انقلاب وحينئذ تحصل هذه النقطة الشهيرة بالبحث عن مقادير s و r صه التي تجعل $\frac{r}{s} = 6$ معدومة أولانهاية وبها تغير إشارة هذه المشتقة

تمارين

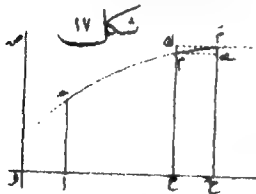
المطلوب إيجاد تحت المماس للمحنى الذي هو دالته

$$\frac{s - s}{s} = 5$$

$$\frac{s}{s - s} = 7 \quad \text{الحل}$$

في تفاضل مساحة منح من مستو

بالمساحة المحصورة بين منح من مستو مثل h م ورأسى ثابت h ورأسى حتماً التناقض h م ومحور السينات و s دالة للأنقى و $h = s$ الذي هو أفق النقطة h م حيث أنه يتغير متى غيرت النقطة h فلا بحث عن



تفاضل هذه الدالة نفرض أن $h = s$ و $h = s$ والرمز بالرمز h للسطح $h = s$ المطابق لزيادة صغيرة جدًا $h = s$ للأنقى فإذا رسم المستقيمان $h = s$ و $h = s$ موازيين للحمور و h و h حتى يتلاقيا مع الرأسين $h = s$ و $h = s$ بحيث أنه يمكن

دائماً أخذ النقطة h قريبة قريباً كافياً من نقطة h بحيث تكون الرأسيات متزايدة أو متناقصة من h إلى h (وقد فرضنا أنها متزايدة لاجل عدم ثبوت الفكرة) فيكون

$$h = s < h = s < h = s \text{ و } h = s > h = s > h = s$$

أعني أن $h = s < h = s$ و $h = s > h = s$ (ف $h = s$) ف $h = s$

آی ان

$$v < \frac{v}{f_s} < v + v$$

وحيث أنه عند النهاية يكون

$$\frac{66}{\text{م}} = \text{ص} \text{ أو } 66 = \text{ص م}$$

بنقله ولو أنه يمكن بالضرورة أن يفرض أنه بأخذ النقطة م قريبة قريبا كافيا من نقطة م تكون الرأسيات متزايدة أو متناقصة من م الى م' فان هذا الفرض غير لازم ويكفي لاجل اقامة الدليل اعادة البرهان المتقدم مع تعويض صه بـ صه + ف صه فيه بالرمزين صه و صه اللذين هما أصغر وأكبر الرأسيات على التناظر في المسافة التي يغير فيها الافق.

بالمثل طريقة البرهان المتقدمة توافق الحالة التي يكون فيها المحوران مائلين غير أنه يوجد فرق واحد وهوان الزيادة في ϕ تكون حينئذ محصورة بين مساحتي متوازي أضلاع أضلاعهم مماويزة للمحورين وحيث أن مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب ضلعين متجاورين في جيب الزاوية الواقعة بينهما فبالرمز بحرف ω لزاوية المحورين يكون

$$66 = 66 \text{ ح و}$$

في المسايح، معتبرة نهايات لمجموع متوازيات أضلاع

١٦٢. في الحالة التي يكون فيها المحوران قائمين يكون السطح ab نهاية مجموع

مستطيلات داخلية متكونة من دوائر موازيات

الى وسطه من النقط ح ر ر ه ر

ومروم الخ المأخوذة على المنحنى وينتهي

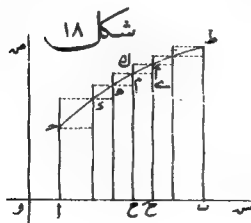
كل من هذه الموازين رأيي النقطة التالية

(ويكون أحدهما المستطيلات هو

م = ح ح مثلاً) ويفرض أن هذه النقط

قرية قرالانها" يامن بعضها وأن عدد هازيد

الى ما لانهاية



فلنفرض في أول الامر ان الرأسيات تكون متزايدة على الدوام من γ الى τ وليكن
 ν و ν حدائبي نقطة حينما اتفق من المتخني نرضها μ مثلا وليكن $\nu + \nu$ ف ν
 ν و ν ف ν حدائبي النقطة التالية μ فيكون

$$\mu - \nu = \nu - \nu$$

واذا رمزنا بالرمز μ (ν ف ν) لمجموع كافة الحدود المشابهة للعاصل ν ف ν
 أعني لمجموع كافة المستطيلات الداخلة من γ الى τ فن الواضح انه اذا جعل سطح
 γ τ $\nu = \nu$ يكون

$$\nu < \mu$$
 (ν ف ν)

فاذا مدت الآن من جميع النقط المعتبرة على المتخني موازيات للعمود ν ومنتهية برأسيات
 النقط السابقة تتكون مستطيلات خارجة مشابهة للمستطيل

$$\gamma - \mu = \mu - \nu$$
 (ν ف ν) = ν ف ν + ν ف ν

وحيث ان السطح γ τ أصغر من مجموع هذه المستطيلات فيكون

$$\nu > \mu$$
 (ν ف ν) + μ (ν ف ν)

لكن عند ما يزيد عدد التقاسيم يميل ν الى الصفر فينتج من قاعدة أبتسها في ν
 أن μ (ν ف ν) يميل كذلك الى الصفر واذن يكون

$$\nu = \mu$$
 [μ (ν ف ν)]

وبمثل ذلك يثبت أن ν نهاية مجموع المستطيلات الخارجة
 . يطبق البرهان نفسه متى كانت الرأسيات متناقصة على الدوام من γ الى τ وحينئذ
 تكون النظرية التي أبتسها حقيقة متى تغيرت الرأسيات بكيفية حينما اتفق لانه يمكن
 دائما قسمة المساحة الكلية الى أجزاء منها تتكون الرأسيات آخذة على الدوام اما في الزيادة
 واما في النقص

تطبيقان

بـ ١٣٢ الاول - لتكن

$$٢٢ = \text{فسه} \left(1 + \frac{\sqrt{6\text{صه}}}{6\text{سه}} + 1 \right)$$

وحرف ل رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم فسه وهذا القانون يطبق على كل ضلع من أضلاع الخط المضلع اذا أبدل فيه سه و صه باحداثيات الرؤس المتتالية وحينئذ بأخذ مجموع الاضلاع التي مثل مم يحدث

$$(١) \quad ٢ = \text{مه} \left(1 + \frac{\sqrt{6\text{صه}}}{6\text{سه}} + 1 + \text{ف سه} \right)$$

ولنفرض الآن ان د الذي هو عدد اضلاع الخط المضلع يزداد الى ما لانهاية وان كل ضلع من اضلاع هذا الخط يميل الى الصفر بحيث ان المجموع مه فسه له مقدار محدود ثابت هو الشرق اب بين أقصى نهايتي القوس ح د فموجب به لا بد يكون

$$(٢) \quad \text{نها مح ل ف سه} = ٠$$

وخلاف ذلك اذا جعل سه متغيرا غير متعلق ورسم المنحنى الذي رأسه سه معين بدلالة سه بواسطة المعادلة

$$\sqrt{\frac{6\text{صه}}{6\text{سه}}} + 1 = \text{صه}$$

وفرض ان ط هو جزء هذا المنحنى المحصور بين الرأسين ح ا و د ب ورمز بحرف و المساحة و ا ب ط يكون

$$(٣) \quad \text{نها مح سه ف سه} = \text{نها مح} \left(1 + \frac{\sqrt{6\text{صه}}}{6\text{سه}} + 1 \right) = \text{و}$$

وحينئذ يقول القانون (١) بسبب المتساويتين (٢) و (٣) الى

$$(٤) \quad \text{نها ح} = \text{و}$$

فيعلم من ذلك أن محيط خط مضلع مرسوم داخل قوس معلوم من منحنى مستوي يميل الى نهاية معينة متى مالت جميع الاضلاع للصفر وغير ذلك فان هذه النهاية غير متعلقة بالناموس الذي تتناقص به اضلاع المضلع

والنهاية γ التي أبتنا وجودها تسمى طول قوس المنحنى σ ،
 فإذا رمزنا الآن بحرف ρ لطول القوس σ م الذي نهايته σ ثابتة ونهايته σ المطابقة
 للافقى σ متغيرة يكون ρ دالة للمتغير σ ومن السهل إيجاد تفاضل هذه الدالة لأنه
 بموجب ما تقدم يكون القوس ρ مساويا للمساحة γ المحصورة بين المنحنى γ و
 ومحور السينات ورأسى النقطتين σ و σ ، وتفاضل هذه المساحة هو σ σ

$$\text{أو } \gamma + 1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \text{ فاذن يكون}$$

$$\gamma + 1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \text{ أو } \gamma = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

وبمقدار σ ، هذا يمكن الدلالة بقاية البساطة على جيب وجيب تمام الزاوية التي يكونها المماس
 في نقطة σ مع محور السينات لانتا إذا رمزنا بحرف ϵ لهذه الزاوية يكون

$$\frac{\sigma}{\sigma} = \epsilon$$

واذن يكون

$$\frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = \epsilon \text{ ، } \frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = \epsilon$$

في نهاية النسبة الواقعة بين قوس ووتره

بين نهاية النسبة الواقعة بين قوس حيثما اتفق ووتره هي الواحد
 ولأنبات ذلك نعتبر زيادة حيثما اتفق للقوس σ وليكن $\sigma = \sigma$ فيكون

$$\frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma}$$

(١٨٠)

ومتى مال ف سه الى الصفر نزل كلتا التبتين

$$\overline{\left(\frac{6}{سه} + 1\right)} \text{ الى } \overline{\left(\frac{٦}{سه} + 1\right)}$$

وانن يكون

$$١ = \frac{\text{قوس } ٢٢}{٢٢}$$



الفصل الثاني

في معامسات المخنيات المستوية المنسوبة لاحداثيات قطبية

في تعيين المماس

بهذا للاجل تعيين المماس في نقطة م لمخني منسوب الى احداثيات قطبية

نفرض أن و القطب وان و س المحور القطبي

ونفرض م س و م = و و = و م هما

احداثيات نقطة م وان

$$\varphi = \psi (و)$$

معادلة المخني فالزاوية ψ التي يكونها اتجاه

المماس م ف مأخوذا في الجهة التي تزداد فيها و

مع الاتجاه و م ممتدات كفي لتعيين المماس

فليكن $\varphi + \psi$ ف φ و $\varphi + \psi$ ف و احداثيتي نقطة م قريبة جدا من نقطة م ولتعد القاطع م م ونصف القطر و م وعند م ك عمودا على و م فن المثلث م ك م يحدث

$$\sin \varphi = \frac{م ك}{م م}$$

ونهاية الزاوية م م ك هي الزاوية ψ وغير ذلك فان م ك = و حاو = و ف و

و م ك = و م - و ك = و م - و م = و ف و واذن يكون

$$(١) \quad \frac{و}{و} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{و}{و}$$

فاذا استخرج و و ٦ من معادلة المخني بدلالة و علم ميل المماس على نصف القطر
البوري في نقطة حيثما اتفق من المخني

(١٨٢)

١٦٧ بد ويمكن أيضا إيجاد قانون (١) بتحويل الاحداثيات وليسان ذلك يجعل المحور القطبي

وسم محورا السينات ونجعل محور الصادات

العمود المقام على رسم من نقطة و فاذا فرضنا

ان $و ح = م$ و $م ص = م$ هما احداثيا

نقطة م يكون

$$\text{طاوم} = \text{طا} (م ص - م و م)$$

لكن

$$\frac{\text{ص}}{\text{م}} = \frac{\text{طاوم}}{\text{م}} \text{ و } \frac{\text{ص}}{\text{م}} = \frac{\text{ص}}{\text{م}}$$

فاذن يكون

$$\frac{\frac{\text{ص}}{\text{م}} - \frac{\text{ص}}{\text{م}}}{\frac{\text{ص}}{\text{م}} + 1} = \text{طاوم}$$

او

$$\text{طاوم} = \frac{\text{ص} - \text{ص}}{\text{ص} + \text{ص}}$$

لكن

$$\text{م} = \text{ح} \text{ و } \text{ص} = \text{ح}$$

$$\text{فان يكون } \text{م} = \text{ح} - \text{ح} \text{ و } \text{ص} = \text{ح}$$

$$\text{ص} = \text{ح} + \text{ح}$$

وجبت ان يكون

$$\frac{\text{ح} (\text{ح} + \text{ح}) - \text{ح} (\text{ح} - \text{ح})}{\text{ح} (\text{ح} + \text{ح}) + \text{ح} (\text{ح} - \text{ح})} = \text{طاوم}$$

ومن بعد الاختصار يحدث

$$\text{طاوم} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}}$$

في طول تحت المماس وتحت العمودى

١٦٨ في جله الاحداثيات هذه يكون تحت المماس هو العمودى و شكل ٢٢ المقام على نصف القطر البورى وم من نقطة الاصل ومنه بالمماس م و تحت العمودى و يقاس على هذا المستقيم بالابتداء من القطب و الى تقاطع العمودى م في و بموجب هذا التمرين اذا فرضنا بالزمين م و ع تحت المماس وتحت العمودى يكون

$$\text{م} = \text{و} = \text{طاء} = \frac{\text{و} \text{و} 6}{\text{و} 6} \text{ و}$$

$$\text{ع} = \text{و} = \frac{\text{و} 6}{\text{طاء} 6}$$

في تفاضل قطاع

١٦٩ دلته تبر قطاعا ع وم شكل ٢٢ محصورا بين نصفي قطرين بورين و ع و وم وليكن ع وم = و و م = ف و فيمكن أخذ القوس م م صغيرا بحيث انه من م الى م تكون اقسام الاقطار البورية متزايدة على الدوام أو متناقصة على الدوام ولاجل عدم تشتت الفكر نفرضها متزايدة ولجعل نقطة و مركزا ونرسم قوسى الدائرة م م و م كل منتهيين بنصفي القطرين البورين وم = و و م = و فيكون

$$\text{وم كل} < \text{ف و} < \text{وم}$$

وحيث ان

$$\text{وم} = \frac{1}{\text{ف}} \text{ و} \text{ف و} = \text{وم كل} = \frac{1}{\text{و}} \text{ ف و}$$

فيكون

$$\frac{1}{\text{ف و}} < \text{ف و} < \frac{1}{\text{و}} \text{ ف و}$$

أو

$$\frac{1}{\text{ف و}} < \frac{\text{ف و}}{\text{و}} < \frac{1}{\text{و}} \text{ ف و}$$

وحيث انه عند النهاية يصير و مساويا و فيكون

$$\frac{1}{\text{ف و}} = \frac{\text{ف و}}{\text{و}} \text{ أو } \frac{1}{\text{ف و}} = \frac{\text{و}}{\text{و}} \text{ ف و}$$

(١٨٤)

في تفاضل قوس من معين

بـ ٧٠ يتوصل الى تفاضل القوس بتحويل الاحداثيات فان

$$\sqrt{٧٠} = \sqrt{٦٠ + ١٠}$$

$$\sqrt{٧٠} = \sqrt{٦٠ + ١٠} = \sqrt{٦٠ + ١٠} = \sqrt{٦٠ + ١٠}$$

$$\sqrt{٧٠} = \sqrt{٦٠ + ١٠}$$

أو

تطبيقات

بـ ٧١ الد الاول - من المعلوم انما اذا جعلت بورة القطع الناقص الميني وهي ب قطبا والمحور الاكبر محورا قطبيا تكون معادلاته هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ومن هنا يستخرج

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

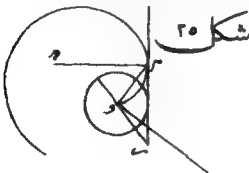
واذن يكون

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

الثاني - لتعتبر حلزون ارشميدس الذي معادلاته

$$r = a(1 - \cos \theta)$$

فالمنحنى يتبدى سيره من القطب ويكون مماسا في هذه النقطة للمحور القطبي ولاجل رسمه نجعل



القطب مركزا ونرسم بنصف قطر يساوي الوحدة محيط دائرة طول قوسها المحصور بين أي نصف قطر بوري والمحور البوري هو و فاذا أخذ هذا الطول من بعد ضربه في ٢ على نصف القطر البوري بالابتداء من المركز نتصل بنقطة من المنحنى

وحيث أن \varnothing يزيد الى ما لا نهاية بازدياد ω فيصنع المنحنى دورات لانهاية لعدد هاحول القطب ويكون $\varnothing = 6\omega$ و

$$\omega = \frac{\varnothing}{6} = \frac{6\varnothing}{6\omega} = \frac{\varnothing}{\omega} \quad \text{طاء}$$

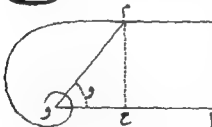
$$\varnothing = 6\omega = 6 \times 2 = 12 \quad \text{م}$$

$$\omega = \frac{\varnothing}{6} = 2 = \frac{6}{3} \quad \text{ع}$$

ويعلم من ذلك أن تحت العمودى ثابت ومن ذلك تعلم طريقة بسيطة جدا الرسم المماس الثالث - لنعتبر الحزون الزائدى (وسمى هكذا لان معادلتها هي $\varnothing = \omega$ تشبه لمعادلة القطع الزائدى وهي مرصه $\varnothing = \omega$)

فن معادلة المنحنى يستخرج $\varnothing = \omega$ وحينما يكون $\omega = 0$ يكون $\varnothing = 0$ وبالنسبة للمقادير الصغيرة جدا للمتغير \varnothing يكون ω كبيرا جدا ويتناقص بازدياد ω وحينما

شكل ٢٦



يكون $\omega = 0$ يكون $\varnothing = 0$ وبناء على ذلك يصنع المنحنى دورات لانهاية لعدد هاحول

القطب ω ولا يصل الى هذا القطب أصلا وتكون هذه النقطة نقطة تقريبية ويكون

للمنحنى خطا تقريبا موازيا للمحور القطبي و ω

لانه اذا أنزل من نقطة م مأخوذة على المنحنى عمودا م على المحور القطبي يكون

$$\omega = \varnothing \quad \text{م} \quad \text{و} \quad \omega = \varnothing \quad \text{طاء} \quad \text{و} \quad \omega = \varnothing \quad \text{ع}$$

ومن هنا يفهم انه اذا مالت ω الى الصفر يميل البعد ω الى \varnothing حيث ان نهاية $\frac{\varnothing}{\omega}$ هي الواحد ثم انه يكون

$$\omega = \frac{\varnothing}{6} = \frac{6\varnothing}{6\omega} = \frac{\varnothing}{\omega} \quad \text{طاء}$$

$$\varnothing = 6\omega = 6 \times 2 = 12 \quad \text{م}$$

ويعلم من ذلك أن تحت المماس ثابت ومن هذه الخاصية تعلم طريقة سهلة لتد المماس من نقطة على المنحنى

الفصل الثاني

في التماس برتب مختلفة

في التماس برتب مختلفة للمخنيات المستوية

بالمثل لنفرض منحنيين $م$ و $ح$ معادلتاهما

$$صه = ص(س) \quad و \quad صه = ص(س)$$

ولنفرض ان لهذين المنحنيين في $م$ نقطة مشتركة ونقارن الرأسين $ل$ و $ل$ و $ل$ المطابقين

لافتي واحد بالقرب من نقطة $م$ ببعضهما وليكن

$$و = و \quad و \quad و = و$$

$$ل = و(س + و) \quad و \quad ل = و(س + و)$$

وانن يكون

$$و(س + و) - و(س + و) = و$$

وبالتحليل على حسب متسلسلة تيلور يكون

$$و = و - و + و + \left(\frac{و}{و} - \frac{و}{و} \right) \frac{و}{و} + \left(\frac{و}{و} - \frac{و}{و} \right) \frac{و}{و} + \dots$$

ويمكن وضع $و$ بالصورة $و \times \frac{و}{و}$ التي فيها $و$ تتعدى عندما يتعدى $و$ وحيث كانت نقطة $م$ مشتركة بين المنحنيين فيكون $و = و$ ويكون

$$و = و + \left(\frac{و}{و} - \frac{و}{و} \right) \frac{و}{و} + \left(\frac{و}{و} - \frac{و}{و} \right) \frac{و}{و} + \dots$$

فاذا فرضنا الآن ان المنحنيين لهما في $م$ مماس مشترك وليكن $و$ يكون

$$\frac{و}{و} = \frac{و}{و} \quad و \quad و = و$$

$$\left(و + \frac{و}{و} - \frac{و}{و} \right) \frac{و}{و} = و$$

بما يسهل إثباته وأن المتخني م^٢ يقرب من المتخني م^١ زيادة عن قرب أى منحن آخر مثل
م^٢ ماربنقطة م وغير مماثل للمستقيم م، من المتخني المذكور لأنه إذا فرض أن
ص^٢ = $\frac{1}{2}$ (س) معادلة المتخني م^٢ يكون

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س} - \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س} \right) \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

(وحرف ١ رمز لصغيرة تنعدم حينما ينعدم س) واذن يكون

$$\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س} - \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س} \right) \frac{1}{2 \times 1}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س} - \frac{1}{6} \frac{ص^2}{س}} = \frac{1}{2}$$

ومن هنا يعلم انتمنى مال س الى الصفر يكون

$$٠ = \frac{1}{2}$$

ويتضح من هنا انه كلما قربنا من نقطة م كلما كان م^٢ أقل من م^١ وبناء على ذلك يكون
المتخني م^٢ موحودا بين م^١ و م^٢

بـ١٣٣ وعلى العموم لنفرض ان

$$(٢) \quad \frac{ص^2}{س} = \frac{ص^2}{س}, \dots, \frac{ص^2}{س} = \frac{ص^2}{س}, \frac{ص^2}{س} = \frac{ص^2}{س}$$

فيكون

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \frac{ص^{1+2}}{س^{1+2}} - \frac{1}{6} \frac{ص^{1+2}}{س^{1+2}} \right) \frac{1}{(1+2) \dots \times 1} = \frac{1}{2}$$

وحرف ل رمز لكمية صغيرة جدا تنعدم حينما ينعدم س

لذا نقرر هذا أقول انه بالقرب من نقطة م يكون المتخني م^٢ الموفى للشروط (٢) أقرب
للمتخني م^١ عن أى منحن آخر م^٢ لا يوفى الشروط المذكورة

لأننا إذا فرضنا أن $\text{ص} = \text{د} \cdot (\text{م})$ معادلة $\text{م} = \text{د}$ وفرضنا أن المشتقات الأولى التي عددها م للدالة ص مساوية للمشتقات الأولى التي عددها م للدالة ص وفرضنا أن م أقل من د يكون

$$\left(\frac{1+\text{د}}{1+\text{م}} - \frac{1+\text{د}}{1+\text{م}} \right) \frac{1+\text{د}}{(1+\text{د}) \cdots (2 \times 1)} = \text{د} - \text{د} = 0$$

وحرف د رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم د وينتج من ذلك أن

$$\frac{\frac{1+\text{د}}{1+\text{د}} - \frac{1+\text{د}}{1+\text{د}}}{\frac{1+\text{د}}{1+\text{م}} - \frac{1+\text{د}}{1+\text{م}}} \times \frac{1-\text{د}}{(1+\text{د}) \cdots (2+\text{د})} = \frac{\text{د}}{\text{د}}$$

وحيث أنه إذا ما لتي الزيادة د إلى الصفر تميل الصغيرتان إلى الصفر كذلك فينتج تكون النسبة $\frac{\text{د}}{\text{د}}$ مناسبة للكمية $1-\text{د}$ وبناء على ذلك يمكن أن نصير أصغر من كل كمية معلومة حيث يفرض أن $\text{د} < \text{م}$

إذا افترضنا أن د واصلطنا على أن نقول أن المتحنيين م و د لهما تماس برتبة د يكون المتحنيين م و د لهما تماس برتبة م ويمكن النطق بالنتائج التي تحصلنا عليها هكذا من نقطة مشتركة بين متحنيين لهما تماس برتبة د لا يمكن أن يمر بين هذين المتحنيين منحني آخر له مع أحد المتحنيين المقروطين تماس برتبة أقل من الرتبة التوينة

في بيان أن رتبة التماس غير متعلقة باتجاه المحورين

بأن رتبة التماس غير متعلقة باتجاه المحورين بشرط أن لا يكون محور الصادات موازيا للمماس المشترك للمتحنين

ويمكن إثبات هذه النظرية باستعمال القوانين العمومية لتحويل الاحداثيات وبيان أن مشتقات رأسبي المتحنيين تكون متساوية أيضا في جله المحورين الجديدين لغاية المشتقة برتبة د إذا فرضنا أن د رتبة التماس في جله المحورين الأولين لكنه يمكن الوصول إلى هذا الإثبات باعتبار أن هندسيه

(١٨٩)

ولبيان ذلك نفرض أن ح م د و ح م د الخنجان التماسان في نقطة م ونعتمد

نقطة م مستقيما حينما اتفق وليكن

م^١ م^٢ م^٣ م^٤ م^٥ م^٦ م^٧ م^٨ م^٩ م^{١٠} م^{١١} م^{١٢} م^{١٣} م^{١٤} م^{١٥} م^{١٦} م^{١٧} م^{١٨} م^{١٩} م^{٢٠} م^{٢١} م^{٢٢} م^{٢٣} م^{٢٤} م^{٢٥} م^{٢٦} م^{٢٧} م^{٢٨} م^{٢٩} م^{٣٠} م^{٣١} م^{٣٢} م^{٣٣} م^{٣٤} م^{٣٥} م^{٣٦} م^{٣٧} م^{٣٨} م^{٣٩} م^{٤٠} م^{٤١} م^{٤٢} م^{٤٣} م^{٤٤} م^{٤٥} م^{٤٦} م^{٤٧} م^{٤٨} م^{٤٩} م^{٥٠} م^{٥١} م^{٥٢} م^{٥٣} م^{٥٤} م^{٥٥} م^{٥٦} م^{٥٧} م^{٥٨} م^{٥٩} م^{٦٠} م^{٦١} م^{٦٢} م^{٦٣} م^{٦٤} م^{٦٥} م^{٦٦} م^{٦٧} م^{٦٨} م^{٦٩} م^{٧٠} م^{٧١} م^{٧٢} م^{٧٣} م^{٧٤} م^{٧٥} م^{٧٦} م^{٧٧} م^{٧٨} م^{٧٩} م^{٨٠} م^{٨١} م^{٨٢} م^{٨٣} م^{٨٤} م^{٨٥} م^{٨٦} م^{٨٧} م^{٨٨} م^{٨٩} م^{٩٠} م^{٩١} م^{٩٢} م^{٩٣} م^{٩٤} م^{٩٥} م^{٩٦} م^{٩٧} م^{٩٨} م^{٩٩} م^{١٠٠}

التماس في نقطة م فتكون معادلته هي

$$صه = م سه + د$$

ولنفرض أن

$$صه = د(سه) و صه = د(سه)$$

هما معادلتا الخنجان ولنعتبر رأسيات هذه الثلاثة خطوط المطابقة لنقطة د مأخوذة على

الاول فيكون

$$\left(١ + \frac{١+د}{١+د} - \frac{١+د}{١+د} \right) \frac{١+د}{(١+د) \dots ٣ \times ٢ \times ١} = د$$

وحيث اننا قد فرضنا ان المستقيم الممدود من نقطة م مخالف للامماس فيكون

$$\left(١ + د - \frac{د}{سه} \right) د = \left(١ + \frac{د}{سه} - \frac{د}{سه} \right) د = د$$

واذن يكون

$$\frac{١}{(١+د) \dots ٣ \times ٢ \times ١} \times \frac{١+د}{١+د} \left(١ + د - \frac{د}{سه} \right) = \frac{د}{(١+د) \dots ٣ \times ٢ \times ١}$$

ففي مال ح الى الصفر تقبل كلتا ل و د الى الصفر أيضا وحيث نذب اهدا ان النسبة

$$\frac{د}{(١+د) \dots ٣ \times ٢ \times ١} \text{ تقبل الى نهاية محدودة}$$

وحيث يمكن أن يقال انه اذا كان التماس برتبة د تكون النسبة $\frac{د}{(١+د) \dots ٣ \times ٢ \times ١}$ صغيرة جدا

برتبة د وغير ذلك فان العكس يهـي

(١٩٠)

١٧٥ لد لنفرض الآن اتناشينا المنحنى الى محورين آخرين ومدنا من نقطة د موازيا لمحور الصادات الجديد ولتكن د نقطة تقاطع هذا الموازي مع المنحنى الذى معادلته ص = د (س) ولتكن د نقطة تقاطعه بالمستقيم م د فلاجل اثبات ان رتبة التماس لا تغير يكفي بيان ان النسبة $\frac{د}{١+د(د)}$ تميل الى النهاية محدودة لان النسبة

$\frac{د}{د}$ تكون فى هذه الحالة صغيرة برتبة د وعليه يكون التماس برتبة د أيضا

فاذا مد د يحدث من المثلث د د د

$$\frac{د}{د} = \frac{د}{د}$$

فى قربت نقطة د قربا لانها ثبات م تيل النقطة د الى د كما تيل اليها نقطة د وبناء على ذلك تطبق تقطنا د و د عند النهاية على بعضهما وان د يميل د الى التماس فى نقطة م وان تكون النسبة بين جيبى الزاويتين د و د نهاية محدودة وحيث ان النسبة $\frac{د}{د}$ تبقى محدودة متى قربت نقطة د من نقطة م اذا ان المثلث المتغير

د د يكون على الدوام مشابها لنفسه فيكون

$$د = د \frac{د}{د} \text{ و } د = د \frac{د}{د}$$

ومن هنا يستنتج أن

$$\frac{د}{١+د\left(\frac{د}{د}\right)} \times \frac{د}{١+د(د)} = \frac{د}{١+د(د)}$$

ويستنتج من هنا ان النسبة $\frac{د}{١+د(د)}$ تميل الى نهاية محدودة وهو ما كان يلزم اثباته

فالمستقيم المماس للمحن يكون له مع هذا المنحنى تماس برتبة أولى اعنى برتبة فردية وهو يوجد
يا كله في جهة واحدة من المنحنى في نقطة التماس
فإذا كانت نقطة التماس نقطة انقلاب يكون التماس برتبة زوجية ويكون المماس ممحرفا
للمنحنى

في المنحنيات الالتصاقية

ب ١٧٧ لتكن المعادلة

$$(1) \quad (s \text{ و } ص \text{ و } ب \text{ و } ح \text{ و } د \text{ و } ٠) = ٠$$

معادلة تشتمل على ثوابت اختيارية ب و ح و د و ٠، عددها ٥ + ١ توافق
بحسب المقادير المعطية لها منحنيات مختلفة لانهاية لعددها فيمكن انتخاب هذه الكميات
ب و ح و د و ٠ بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته (١) مع منحنى معلوم بالمعادلة

$$(2) \quad ص = د (س)$$

تماس في نقطة معلومة (س و ص) برتبة معينة تكون مساوية للعدد ٥ في الغاية فإذا
وجب أن يكون التماس برتبة ٥ تكون الشروط الآتية المطابقة للافقى س مستوفية
وهي

$$(3) \quad ص = ص, \quad \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}, \quad \frac{ص}{س^2} = \frac{ص}{س^2}, \quad \dots, \quad \frac{ص}{س^5} = \frac{ص}{س^5}$$

$$(4) \quad \text{وتحصل المشتقات } \frac{ص}{س}, \quad \frac{ص}{س^2}, \quad \dots, \quad \frac{ص}{س^5} \text{ بأخذ تفاضل المعادلة (١)}$$

$$\text{مرارات متتالية عددها ٥ وتحصل على المشتقات } \frac{ص}{س}, \quad \frac{ص}{س^2}, \quad \dots, \quad \frac{ص}{س^5}$$

بأخذ تفاضل المعادلة (٢) مرارات متتالية عددها ٥ وبواسطة المعادلات (٣) التى عددها
٥ + ١ تعين الثوابت المجهولة التى عددها ٥ + ١ بدلالة احداثي نقطة التماس
ومعاملات المعادلة (٢)

ومتى عيئت الثوابت ب و ح و د و ٠ بحيث يتحصل على التماس بأعلى رتبة ممكنة
وهي تساوى عدد الثوابت ناقصا واحدا يقال ان المنحنى الذى يكون مينا بالمعادلة (١) ومطابقا
للمقادير التى عيئت للثوابت التصاقى للمنحنى الذى معادلته $ص = د (س)$

(١٩٣)

بـ١٧٨ ولتطبيق ما ذكره اعتبر الخط المستقيم الذي معادلته

$$(١) \quad ص = د + ح$$

والمحني الذي معادلته $ص = د(ح)$

فحيث ان معادلة المستقيم لا تشتمل الاعلى ثابتين اختياريين فلا يمكن أن يحصل الاعلى تماس برتبة أولى ويلزم لاجل ذلك استيعاء هاتين المعادلتين وهما

$$ص = ص \quad و \quad \frac{ص}{ح} = د \quad \text{أى} \quad \frac{ص}{ح} = د$$

فاذا عوض المتغير $ص$ بالمتغير $ص$ في المعادلة (١) حدث

$$ص = د + ح$$

ومن هنا يستخرج

$$د = ص - ح = ص - \frac{ص}{ح} = \frac{ص(ح - ١)}{ح}$$

وتول حينئذ معادلة (١) الى

$$ص = \frac{ص}{ح} + ص - \frac{ص}{ح} = ص \quad \text{أى} \quad ص = ص = \frac{ص(ح - ١)}{ح}$$

وهذه المعادلة هي معادلة التماس في النقطة $(ح, ص)$

بـ١٧٩ ولتطبيق الاعتبار المتقدم على الدائرة أضافه قول
لتكن المعادلة

$$ص = د(ح)$$

معادلة منحنى منسوب الى محورين قائمين فحيث ان معادلة الدائرة تشتمل على ثلاثة ثوابت اختيارية فتكون الدائرة الالتصاقية للمنحنى المفروض هي الدائرة التي يكون لها مع هذا المنحنى تماس برتبة ثانية فلنفرض ان

$$(١) \quad (ح - ل) + (ص - ع) = ٢$$

معادلة هذه الدائرة فنباستخرج بأخذ تفاضلهما مرتين متتاليتين

$$(٢) \quad ح - ل + (ص - ع) = ٠ \quad و \quad ٠ = \frac{ص}{ح}$$

$$(٣) \quad ١ + \frac{ص}{ح} + (ص - ع) = ٠$$

(٢٥) تفاضل - اول

وحيث انه يجب أن يكون

$$\frac{\text{صه}}{\text{كاصه}} = \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} \text{ و } \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} = \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}$$

فبتعويض صه و كاصه و كاصه في الارتباطات (١) و (٢) و (٣) بالمقادير

صه و كاصه و كاصه على التناظر تحصل ثلاث معادلات بها تعين ل و د وهي

$$(٤) \quad \text{ل} - \text{صه} = (\text{د} - \text{صه}) + \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}$$

$$(٥) \quad \text{د} = \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} (\text{د} - \text{صه}) + (\text{ل} - \text{صه})$$

$$(٦) \quad \text{د} = \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} (\text{د} - \text{صه}) + \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١$$

و صه و كاصه هما احدى نقطه التماس

ومن هذه المعادلات يستخرج

$$\frac{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١\right) \frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}}{\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}} = \text{ل} - \text{صه} \text{ و } \frac{\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١}{\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}} = \text{د} - \text{صه}$$

ويكون

$$\frac{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١\right)}{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}\right)} = \left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١\right) \frac{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١\right)}{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}\right)} = \text{د}$$

ويكون

$$(٧) \quad \frac{\left(\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}} + ١\right)}{\frac{\text{كاصه}}{\text{كاصه}}} + \text{د} = \text{د}$$

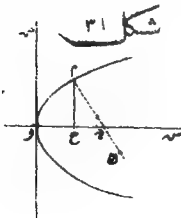
بيننا حيث كان بسط هذا المقدار موجبا فيلزم استعمال اشارة + أو اشارة - بحسب ما يكون $\frac{ص}{ل}$ < . أو > . اذا اريدت تحصيل المقدار المطلق للكمية

ومن المعادلة (٦) يتضح ان $ص - صه$ و $\frac{ص}{ل}$ يكونان دائما متحددتين في الاشارة وحيث كان $ص - صه$ هو الفرق بين رأسي مركز الدائرة ورأسي نقطة التماس فينتج من ذلك أن مركز الدائرة والاتصافية يكون دائما في تقعر المنحنى وحيث كان للمنحنى والدائرة الاتصافية مماس واحد يكون مركز الدائرة والاتصافية موجودا على عمودي المنحنى في النقطة (س و صه) ويمكن أيضا استنتاج ذلك من المعادلة (٥) موضوعة بالصورة

$$(٨) \quad ١ - \frac{ص}{ل} = \frac{صه}{ل - صه}$$

التي ينتج منها ان المستقيم الذي معادله الزاوي $\frac{صه}{ل - صه}$ اعني المستقيم الواصل من نقطة التماس ومركز الدائرة الاتصافية يكون عمودا على المماس المشترك ولما كان للدائرة الاتصافية مع المنحنى تماسا برتبة ثانية على العموم أي برتبة زوجية فتكون مختصرة للمنحنى الا في بعض نقط مخصوصة يكون فيها التماس برتبة أعلى من الرتبة الثانية وفي هذه الحالة الاخيرة اذا كان التماس برتبة فردية يكون المنحنى ودائرته الاتصافية موجودين في جهة واحدة من المماس المشترك

وعالبا تسمى الدائرة الاتصافية دائرة الانحناء ويسمى مركزها مركز الانحناء ويسمى نصف قطرها نصف قطر الانحناء وزمره من الآن فصاعدا بالرمز χ وسنشهد فيما بعد ان شاء الله تعالى أصل هذه التسمية



بيننا مثلا لنفرض ان المقصود تحصيل نصف قطر الانحناء χ لقطاع منحروطي في نقطة حيثما اتفق فلذلك نفرض ان هذا المنحنى منسوب الى أحد محوريه والمماس من رأسه فتكون معادلته هي

$$(١) \quad صه = ع + ل س$$

فاذا اخذت تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

(١٩٦)

$$\frac{صه + لسه}{صه} = \frac{صه}{صه}$$

$$ل = \left(\frac{صه}{صه} \right) + \frac{صه}{صه}$$

وبتعويض $\frac{صه}{صه}$ بمقدارها يحدث

$$ل = \frac{صه + لسه + لسه}{صه} + \frac{صه}{صه}$$

ويكون

$$\frac{ل}{صه} = \frac{صه}{صه}$$

واذن يكون المقدار المطلق لنصف قطر الانحناء $ل$ هو

$$(٢) \quad \frac{صه \left(\frac{صه}{صه} + ١ \right)}{ل} = ل$$

وبسط $ل$ هو مكعب العمودى $م$ لانه من المثلث القائم الزاوية $م$ $ل$ $صه$ يحدث

$$م = ل = ع = صه + صه \frac{صه}{صه} \text{ أى } صه = \sqrt{\frac{صه}{صه} + ١}$$

(وحرف $ع$ رمز طول العمودى) واذن يكون

$$ع = \frac{صه}{ل} \left(\frac{صه}{صه} + ١ \right)$$

وحينئذ يكون

$$(٣) \quad \frac{ع}{ل} = ل$$

اعنى انه فى كل قطاع مخروطى يكون نصف قطر الانحناء مساويا لمكعب العمودى مقسوما على نصف الكمية المخصصة

(١٩٧)

ومن السهل تحصيل مقدار x بدلالة af النقطة m فقط لان

$$صه = صه^2 ع^2 صه + ل صه^2 و صه = \frac{صه}{صه} = ع + ل صه$$

وانن يكون

$$ع^2 = ع^2 ع^2 صه + ل صه^2 + (ع + ل صه^2) = (ل + ل^2) صه^2$$

$$+ ع^2 ل صه + ع^2 صه + ع^2$$

ويكون

$$\frac{ع^2}{ع^2} \left[\frac{ع^2 + صه (ل + 1) ع^2 + صه^2 (ل + ل^2)}{ع^2} \right] = ع$$



الفصل الثالث

في منتشرات وغلافات المنحنى المستوية

في المنتشرات والانتشرات

بمسألة قد شاهدنا ان الاحداثين $ل$ و $س$ لمركز الانحناء المطابق لنقطة $م$ من المنحنى $ح$ م يكونان معينين بماتين المعادلتين

$$(١) \quad س - ل + (س - ل) \frac{ك}{س} = ٠ \quad ,$$

$$(٢) \quad ١ + \frac{ك}{س} (س - ل) + \frac{ك}{س} = ٠$$

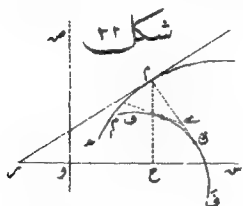
فمركز الانحناء $ل$ و $ل$ و ... يتكون منها من جديد ف يسنى منتشر المنحنى $ح$ م

وهذا المنحنى الاخير يسمى انتشار ف وسرى قريبا ان شاء الله تعالى أصل هذه التسمية وحيث ان المعادلتين (١) و (٢) مع المعادلة

$$(٣) \quad س + (س - ل) = ٠$$

التي هي معادلة المنحنى المعلوم $ح$ م تعين الاحداثيين $ل$ و $س$ لمركز الانحناء $ل$ المطابق للنقطة المعلومه $م$ (س و س) من المنحنى

$ح$ م فيحصل على معادلة مسار النقط $ل$ بحذف س و س من الثلاث المعادلات (١) و (٢) و (٣)



في الخواص العمومية للمنتشر

بمسألة المنتشر خواص عمومية شهيرة ذكرها فنقول وبالله التوفيق والهدى لاقوم طريق ان أعمل على المنحنى $ح$ م تمس المنتشر في النقط $ل$ و $ل$ و ... أعنى في مراکز الانحناء لانه اذا جعل س متغيرا غير متعلق وأخذنا تفاضل المعادلة (١) معتبرين فيها

س و $\frac{ك}{س}$ و $ل$ و س دوال للمتغير س يكون

$$٦صه - ٦ل + (٦صه - ٦) + (صه - ٦) \frac{٦صه}{٦صه} = ٠$$

أو

$$٦صه [١ + \frac{٦صه}{٦صه} + (صه - ٦) \frac{٦صه}{٦صه}] - ٦ل - ٦ = ٠$$

وبملاحظة معادلة (٢) يكون

$$٦ل + ٦ = \frac{٦صه}{٦صه} = ٠$$

ومن هنا يكون

$$(٤) \quad \frac{٦صه}{٦صه} = \frac{٦}{٦ل}$$

ومن هذا الارتباط الأخير يعلم أن المماس المددول المنتشر من نقطة ل يكون عمودا على المماس المددول الممضى ح م من نقطة م واذن يكون المستقيم ل م مماسا للمنتشر

بالمثل ينتج مباشرة من هذه الخاصية أن منتشر ممضى هو مسار التقاطعات المتتالية لاعددة هذا المنحنى وليسان ذلك نعتبر العمودين م ل و م ل الذين يمان المنتشر في نقطتي ل و ل ونفرض ان ٦ نقطة تقاطعهما فتقرب نقطة م قريبا لانها يمان نقطة م يقرب العمودى م ل من م ل وتميل الزاوية ل ٦ ل الى قائمتين واذن يكون ل ل أكبر ضلع في المثلث ل ٦ ل وحيث ان هذا الضلع نهايته صفر فتكون نهاية ٦ ل صفرا كذلك وبناء على ذلك تتحرك النقطة ٦ على المستقيم الثابت م ل مع قربها قريبا لانها يمان نقطة ل التي يمكن اعتبارها نقطة تقاطع العمودى م ل مع العمودى القريب منه قريبا لانها يمان

بالمثل الفرق بين نصفي قطري انحناء مثل م ل و م ل يساوى القوس ل ل المحصور بين مركزي الانحناء المطابقين لنصفي القطرين المذكورين

ولاشبات ذلك نأخذ تفاضل المعادلة

$$٦خ = (٦ل - ٦) + (صه - ٦) = ٠$$

معتبرين فيها صه و ل و ٦ و ٦خ دوال للمتغير الغير المتعلق ٦ فيحدث

$$٦خ = (٦ل - ٦) + (صه - ٦) = ٠$$

(٢٠٠)

$$\text{أو} \quad \text{فخ} \text{ ك} = \text{ك} \text{ م} - \text{م} - \text{ل} + (\text{م} - \text{ع}) \frac{\text{ك} \text{ م}}{\text{ك} \text{ م}}$$

$$- (\text{م} - \text{ل}) (\text{ل} - \text{ك}) - (\text{م} - \text{ع}) \text{ك}$$

وهذا يؤل بموجب المعادلة (١) من يـ إلى

$$\text{فخ} \text{ ك} = - (\text{م} - \text{ل}) (\text{ل} - \text{ك}) - (\text{م} - \text{ع}) \text{ك}$$

ومن هنا نستخرج

$$\frac{\text{ك} \text{ م}}{\text{ك} \text{ م}} = \frac{\text{ك} \text{ م} - \text{ل} - \text{م}}{\text{فخ} \text{ ك}} + \frac{\text{ك} \text{ م}}{\text{ك} \text{ م}} \times \frac{\text{ع} - \text{م}}{\text{فخ} \text{ ك}} \times \frac{\text{ك} \text{ م}}{\text{ك} \text{ م}}$$

(وحرف ق رمز للقوس ف لـ)

لكن الطرف الثاني هو جيب تمام الزاوية التي يكونها المستقيم م ك مع المماس المنتشر في نقطة لـ وحيث ان هذه الزاوية معدومة فيكون جيب تمامها مساويا للواحد ويكون

$$\text{ك} \text{ م} = \text{فخ} \text{ ك}$$

ومن هذه المعادلة يستنتج ان

$$\text{فخ} = \text{ق} + \text{ن}$$

(وحرف ن رمز لكمية ثابتة) ويمثل ذلك يكون

$$\text{فخ} = \text{ق} + \text{ن}$$

واذن يكون

$$\text{فخ} - \text{ق} = \text{ن} = \text{قوس ف لـ} - \text{قوس ف ك} = \text{قوس لـ ك}$$

بـ ويمكن اثبات هذه الخاصية بالبناء على أن المنتشر هو مسار التقاطعات المتتالية للأعمدة

على المنحنى المعلوم لا تنال وعرضنا قوسا صغيرا

مثل لـ ك من المنتشر وتره وفرضنا امتداد هذا

الخط فإنه يقطع المنحنى في نقطة مثل م ولا يكون

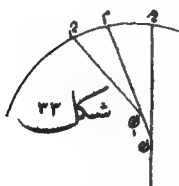
المستقيم لـ م مخالفا للعمود لـ ن الممدود

من نقط لـ الاختلاف يسيرا جدا

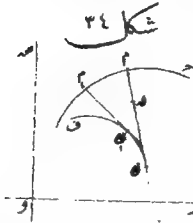
ولا يختلف لـ م عن العمود لـ ن الممدود من

نقطة لـ الاختلاف يسيرا جدا بحيث يكون

$$\text{لـ ك} = \text{لـ م} = \text{لـ ن} - \text{لـ ن} = \text{لـ ن} - \text{لـ ن}$$



وخاصية المنحنى ف ك هذه هي السبب في تسميته بالمنتشر لانك لو تصورت أن خطا ب ج ر منه ملفوف على ف ك وجزؤه الآخر مشدود على



اتجاه المماس لـ م ومنته نقطة م على المنحنى ح م أقول انه اذا فك هذا الخط طمع شده على الدوام فان نهايته ترسم المنحنى ح م لانا اذا فرضنا أن الجزء المستقيم متجه الآن على حسب المماس لـ م وان النهاية في نقطة و يكون

$$و ك = م ك + ل ك$$

حيث ان ل ك هو الجزء الذي صار مستقيما ونعلم أيضا أن م ك = م ل + ل ك فاذن يكون و ك = م ك وتطبق نقطة و على نقطة م على المنحنى ح م وحينئذ ترسم نهاية الخط المنحنى ح م

بـ ١٨٧ يشاهد مما تقدم أن المنحنى الواحد ف ك له إشارات لانهايه لعدد ها وانه يمكن لأجل رسمها تطويل الخط أو تنقيصه بكمية اختيارية ويكون مماسات المنحنى ف ك أعده على جميع الانتشارات ويعلم من ذلك أن هذه الانتشارات تكون أعدها ومرا كرا غنائها واحدة وحيث انها تعد على أعدها المشتركة أطوالا فإمّا فيمكن بواسطة انتشار تخصيل الانتشارات الآخر

بـ ١٨٨ اذا كان المنحنى جبريا تكون أنصاف اقطار دوائر الالتصاقية لها مقادير جبرية أيضا بموجب القوانين التي وجدت سابقا ويعلم من ذلك أن قوس المنتشر الذي هو الفرق بين نصفي قطرين من أنصاف الاقطار هذه يكون له في هذه الحالة مقدار جبري ويمكن البحث عن طول هذا المنحنى

في نصف قطر انحناء القطع المكافئ ومنتشره

بـ ١٨٩ ولنطبق ما تقدم على القطع المكافئ الذي معادته

$$ص^٢ = ٢ ع س$$

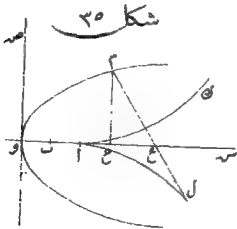
فقد علمنا في بـ ١٨٢ أن

$$\frac{ع}{ع} = س$$

(٣٦) تفاضل - اول

(٢٠٢)

فاذا اريد ايجاد نصف القطر هذا بدلالة احد اثني النقطه م لزم اخذ تفاضل المعادله
صه = ٢ ع صه مرتين وبذلك يحدث



$$\frac{ع}{صه} = \frac{ع}{صه} \text{ و } \frac{ع}{صه} = \frac{ع}{صه}$$

واذن يكون المقدار المطلق لنصف قطر الانحناء هو

$$\frac{\frac{ع}{صه}}{\frac{ع}{صه}} = \frac{\left(\frac{ع}{صه} + 1\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{ع}{صه}} = \text{نح}$$

ولاجل ايجاد معادله المنتشر نعوض $\frac{ع}{صه}$ و $\frac{ع}{صه}$ بمقاديرهم في المعادلتين

$$صه - ل + ل - (صه - ع) = \frac{ع}{صه} = 0 \text{ و}$$

$$0 = \frac{ع}{صه} + \frac{ع}{صه} + (صه - ع) = \frac{ع}{صه}$$

فيحدث

$$صه - ل + ل - (صه - ع) = \frac{ع}{صه} \text{ و } 0 = \frac{ع}{صه} + 1 - \frac{ع}{صه}$$

وبحذف صه و صه من هاتين المعادلتين ومعادله المنحنى يتوصل الى معادله المنتشر فن
الثانية يستخرج

$$0 = \frac{ع}{صه} + \frac{ع}{صه} - \frac{ع}{صه} + 1$$

ومن هنا يكون

$$\frac{ع}{صه} = ع$$

وبوضع مقدار ع هذافي المعادله الاولى يحدث

$$0 = \frac{ع}{صه} + ع + ل - صه$$

(٢٠٣)

ومن هنا يكون

$$ل - ع = ٢ م$$

واذن يكون

$$صه = ع - ع' م , م = \frac{1}{٢} (ل - ع) , و صه = ع ٢ م$$

ومن هنا يكون

$$صه = ع' = ع' م , و$$

$$صه = ع ٢ م = \left[\frac{1}{2} (ل - ع) \right] ع' م$$

وحينئذ يكون

$$ع' = ع' م = \frac{1}{2} (ل - ع) ع' م , و$$

$$ع' = \frac{1}{2} (ل - ع) ع' م$$

فاذنقل محور الرأسيات بالتوازي لنفسه الى أن يمر بنقطة ١ بحيث يكون $ع = ١$ فان المعادلة تأخذ أبسط صورة وهي

$$ع' = \frac{1}{2} (ل - ع) ع' م$$

أو

$$\sqrt{\frac{1}{2} (ل - ع) ع' م} = ع'$$

وهذا المنحنى صورته هي لـ ١١ (شكل ٣٥) وهو متماثل بالنسبة لمحور الافقيات وهذا ما هو واضح من أول وهلة ويمتد الى ما لانهاية جهة السينات الموجبة وبأخذ التفاضل يوجد

$$, \sqrt{\frac{1}{2} (ل - ع) ع' م} = \frac{ع'}{2} = \frac{ع'}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1}{2} (ل - ع) ع' م} = \frac{ع'}{2} = \frac{ع'}{2}$$

(٢٠٥)

$$\frac{(صه^4 + د^4 صه)}{د^4} = صه - عه \quad \text{أو}$$

$$\frac{(صه^4 - د^4 صه)}{د^4} =$$

$$صه \frac{(د - صه)}{د} =$$

فإذا فرضنا أن $د - صه = فا$ يكون

$$صه - عه = \frac{(د + فا صه)}{د} = صه + \frac{فا صه}{د} \quad \text{أو}$$

$$(٣) \quad \frac{فا صه}{د} = عه$$

وبإبدال الحروف س و صه و د و د بالحروف صه و سه و د و د بالتناظر وملاحظة أن فا تول إلى - فا يحدث

$$(٤) \quad \frac{فا سه}{د} = ل$$

وحينئذ إذا جعلنا $\frac{فا}{د} = ج$ و $\frac{سه}{د} = ز$ لاجل الاختصار يحدث

$$\frac{١}{ز} \left(\frac{ع}{ز} \right) - = \frac{صه}{ز} \quad \text{و} \quad \frac{١}{ز} \left(\frac{ل}{ج} \right) = \frac{سه}{ج}$$

وبوضع هذين المقدارين في معادلة القطع الناقص موضوعة بالصورة

$$١ = \left(\frac{صه}{ز} \right) + \left(\frac{سه}{ج} \right)$$

نجد معادلة المنتشر وهي

$$(ب) \quad ١ = \frac{ز}{ج} \left(\frac{ع}{ز} \right) + \left(\frac{ل}{ج} \right)$$

(٢٠٧)

وحيث كانت هذه المشتقة معدومة بالمقدار $\epsilon = 0$. ولانهاية المقدار $L = 0$. فيستنتج من ذلك ان المحورين يكونان مماسين للمحنى في النقط Q و P و Q' و P' التي يجب بالنظر للتماثل أن تكون نقط رجوع

في نصف قطر انحناء القطع الزائد ومنتشره

بل ان لا يمكن تحصيل نصف قطر انحناء القطع الزائد ومنتشره مما سبق بان تعوض الكمية ϵ' بالكمية $-\epsilon'$ فبذلك يكون نصف قطر الانحناء هو

$$\text{نح} = \frac{\frac{r}{2}(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{\epsilon})}{\frac{r}{2}}$$

وتكون معادلة المنتشر هي

$$1 = \left(\frac{\epsilon}{1}\right)^{\frac{r}{2}} - \left(\frac{L}{1}\right)^{\frac{r}{2}}$$

وذلك بفرض ان $\epsilon' = \epsilon$ و $\epsilon' = -\epsilon$

$$\text{وان } \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \text{ وان } \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

ويتركب منتشر القطع الزائد من فرعين لانهايين P و Q و P' و Q' مماثلين بالنسبة للمحورين وله نقطتا رجوع Q و Q' توجدان على المحور القاطع بعد البورتين بالنسبة للمركز وهو محاذ في جميع نقطه جهة المحور القاطع

في غلاف منحن متحرك

بأنه متى تحرك منحن على مستوى بتغيير صورته على حسب قانون ما فإنه يكون على العموم مماساً دائماً للمنحن ثابت يسمى غلافه . فلنفرض أن المنحن المتحرك مبين بالمعادلة

$$(1) \quad \epsilon = (\epsilon' + \epsilon'')^2$$

(٢٠٨)

التي فيها Δ ثابت بغير كيفية مستمرة فإذا أعطى هذا الثابت مقدارين متتاليين Δ و $\Delta + \Delta$ فإن المنحنيين الميينين بالمعادلتين

$$\Delta = (s, s, s, s) = (s, s, s, s) \text{ و } \Delta = (s, s, s, s) = (s, s, s, s) \\ \text{يتقاطعان في نقطة } (s, s) \text{ يجب فيها أن يكون}$$

$$\Delta = (s, s, s, s) - (s, s, s, s) = (s, s, s, s)$$

واذن يكون

$$(2) \quad \Delta = \frac{(s, s, s, s) - (s, s, s, s)}{\Delta}$$

فإذا أخذ Δ في النقص الى ما لانهاية فإن احداثي النقطة s, s اللذين لا يزالان محققين للمعادلتين (١) و (٢) يحققان عند النهاية المعادلتين

$$(2) \quad \Delta = \frac{\Delta}{\Delta} \text{ و } \Delta = (s, s, s, s)$$

وحينئذ يتوصل على نقطة التقاطع m للمنحنى (١) مع المنحنى القريب منه قريباً لانهاية يصل بالمعادلتين (٣) فإذا حذف Δ من هاتين المعادلتين يتحصل مسار النقط m أعني مسار نقط التقاطع المتتالية للمنحنيات الميئة بالمعادلة (٣)

والآن أقول ان هذا المسار هو الغلاف المطلوب لان أي منحنى c من المنحنيات الميئة بالمعادلة (١) يكون مقطوعاً بالمنحنى السابق له p والمنحنى التالي له k في نقطتين تنتهيان بأن تنطبقا على بعضهما وحينئذ يميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين الى أن يصير مماساً للمنحنى c ومن الواضح كذلك انه يميل الى أن يكون مماساً لمسار نقط التقاطع المتتالية واذن يكون هذا المسار مماساً لجميع المنحنيات الميئة بالمعادلة (١)

تسميات

الاول - منتهى المنحنى

$$3 \Delta = s = s$$

(٢٠٩)

$$\text{هو } ٨١ ص = ١٦ \left(\sqrt{٢٦ - ٢ ص} + \sqrt{٢٦ - ٢ ص} \right) \left(\sqrt{٢٦ - ٢ ص} + \sqrt{٢٦ - ٢ ص} \right)$$

الثاني - منتشر الخنى

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢}$$

هو

$$\frac{٢}{٢} ٢ = \frac{٢}{٢} (ص - ص) + \frac{٢}{٢} (ص + ص)$$

الثالث - غلاف القطاعات الناقصة المتحدة المركز واتجاه محاورها واحد ومجموع محوري كل منها ثابت هو

$$\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢}$$



(٢٧) تفاضل - اول

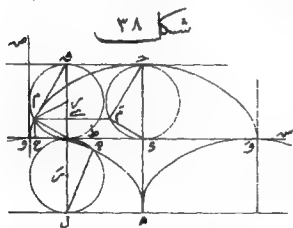
فما يتعلق بالسيكولوجيا

في تعريف السيكاويد ومعادلته

١٩٣٠ السيكولوجية ومسارها وأوضاع نقطة معلومة م على دائرة تدحرج بدون زلق على مستقيم لانهاى ومنه

ولجعل محاور السينات هو المستقيم OS ونجعل نقطة O التي تكون موجودة فيها نقطة M في مدار الحركة نقطة أصل ونجعل العمود OS محورا للصادات

فيعلم من أول وهلة أن الرأسى يكون في نهاية الكبرى في نقطة γ الموافقة للافقى $\delta\omega = \frac{1}{p}$



محيط وم وأن المحنى يقطع محورا السينات
مرة جديدة في نقطة و التي افقها هو محيط
وم وان الجزء ح و من هذا المحنى مماثل
للجزء ح و بالنسبة الى ح و وانه بعد نقطة
و توجد أقواس لانهاية لعدددها مشابهة
لللقوس و ح و وكذا توجد مثل هذه
الأقواس على شمال نقطة و

ولنبحث الآن عن معادلة السكروبولونيك

نفترض ان $و = م ح$ و $ص هـ$ هما احدائنا نقطة كنقطة $م$ من المسار

ونفرض ان $m = n$ وان $m = p = q$ ونوصل m, n ونجد $m = n$ عمودا على $p = q$
فبوجوب كيفية التوليد يكون القوس $m = p$ مساويا للجزء a ط من المستقيم ويكون

مر = وط - ع ط = قوس م ط - م = ح - و ح = ح ط - ح (ط - ح) ،

$$\text{صه} = \text{ط} - \text{ع} = \text{ج} - \text{ح} = \text{حان} - (1 - \text{حان})$$

ولا يحتاج حينئذ لاجل تحصيل معادلة السيكلويد الحذف φ من المعادلتين

(٢١١)

$$(١) \quad \text{سه} = \text{د} (\text{ح} - \text{ح} \text{ان}) \text{ و}$$

$$(٢) \quad \text{صه} = \text{د} (\text{١} - \text{ح} \text{ان})$$

فن الاول يحدث

$$\text{ح} \text{ان} = \frac{\text{د} - \text{صه}}{\text{د}} \quad \text{أو} \quad \text{قوس ح} \text{تا} = \frac{\text{د} - \text{صه}}{\text{د}}$$

واذن يكون

$$\text{ح} \text{ان} = \frac{\sqrt{\text{د}^2 - \text{صه}^2}}{\text{د}}$$

وبوضع هذه المقادير في المعادلة (١) توجد معادلة السيه كالويدهي

$$(٣) \quad \text{سه} = \text{د} \text{ قوس ح} \text{تا} = \frac{\text{د} - \text{صه}}{\text{د}} \sqrt{\text{د}^2 - \text{صه}^2}$$

ولاجل التعبير عن الاشارة المزدوجة للجذور اشارة حان يلاحظ انه اذا كانت نقطة م على القوس د و يكون حان > ط و حان < . واذا كانت النقطة م على القوس د و يكون حان < ط و حان > . فيعلم من ذلك ان الاشارة العليا توافق القوس د و وان الاشارة السفلى توافق القوس د و

في المماس والعمود

ب ١٩٤٠ لاجل تحصيل $\frac{\text{كصه}}{\text{كسه}}$ يمكن أخذ تفاضل المعادلة (٣) الان الابطسط أخذ تفاضلي

المعادلتين (١) و (٢) اللتين فيهما سه و صه دالتان لاه تغير الفير المتعلق ح فبذلك يكون

$$\text{كسه} = \text{د} \text{ كح} (\text{١} - \text{ح} \text{ان}) = \text{صه} \text{ كح} \text{ و}$$

$$\text{كصه} = \text{د} \text{ كح} \text{ان} = \text{كح} \sqrt{\text{د}^2 - \text{صه}^2}$$

وبالقسمة طرفا على طرف يحدث

$$\frac{\text{كصه}}{\text{كسه}} = \frac{\sqrt{\text{د}^2 - \text{صه}^2}}{\text{صه}}$$

(٢١٢)

وحيث كان تحت العمودى فى نقط م مقداره $\frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}$ فبرى انه $\sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}}$ وبما أن

$$\sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}}$$

فيكون م ط هو العمودى فى نقطة م ويكون م ن العمود على م ط هو المماس فى هذه النقطة ومن هنا نتج طريقة بسيطة جداً للمماس للسيركوليد من نقطة م من هذا المحنى لانه اذا رسمت الدائرة ح م على الرأسى الاكبر مجع ولا قطر الهاو مت م موازياً للمحور ورس من نقطة م ورسم من نقطة م مواز للخط ح م فان هذا الموازى يكون هو المماس المطلوب بـ ١٩٥ طول العمودى فى نقطة م مقداره هو

$$\sqrt{\text{كاسه} + \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}} = \sqrt{\text{كاسه} + \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} + \text{كاسه}} = \sqrt{\text{كاسه} + \text{كاسه}}$$

وبما أن ن ط = ح ط ، و ط = ح ط فيكون هذا الطول وسطاً متناسباً هندسياً بين ح ط ، ن ط ، واذا فهو الخط م ط نفسه

في نصف قطر الدائرة الالتصاقية ومركزها

بـ ١٩٣ قد علمت ان

$$\sqrt{1 - \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}} = \frac{\sqrt{\text{كاسه} - \text{كاسه}}}{\text{كاسه}} = \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}$$

فاذا يكون

$$\frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} = 1 - \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} - \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} = \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} - \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}$$

أو

$$\frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}} = \frac{\text{كاسه}}{\text{كاسه}}$$

(٢١٣)

وبوضع مقدارى $\frac{6ص}{6ص}$ و $\frac{٢ص}{6ص}$ هذين فى القانون المعروف لنصف قطر الانحناء يوجد

$$\overline{ص٢٧٢} = \overline{ص٢٨} = \frac{\overline{ص٢١}}{\overline{ص٢}} = \overline{ص٢}$$

وبما ان

$$\overline{ص٢٧٢} = \overline{ص٢٨} \times \overline{ص٢٧٢} = \overline{ص٢٨} \times \overline{ص٢٧٢} = \overline{ص٢٨} \times \overline{ص٢٧٢}$$

فيعلم من ذلك أن نصف قطر الانحناء ضعف م ط وغير ذلك حيث كان م ط هو العمودى
فى نقطة م فيحصل على مركز الانحناء اذا أخذ على اتجاه م ط نقطة د بحيث يكون
م ط = د م

فى منتشر السيكلويد

ب١٩٧د هذه النتيجة يمكن بها إيجاد منتشر السيكلويد بغاية السهولة فلتكن ط د ل دائرة
مساوية للدائرة م م ومماسية فى نقطة ط للمعور و م تحت هذا المستقيم ولاند ل ه
موازيًا للمعور و م ونجد القطر د ه الى أن يتقابل فى ه مع ل ه فحيث كان القوسان
م ط و د ط متساويين فيكون

$$\text{قوس د ط} = \text{قوس د ط}$$

وغير ذلك فان

$$\text{قوس ط د} = \text{قوس ط د}$$

فان يكون

$$\text{قوس د ل} = \text{قوس د ل} - \text{قوس د ط} = \text{قوس د ل}$$

ومن هنا يعلم أن منتشر السيكلويد يتولد من تحرك نقطة مثل د موجودة على محيط الدائرة
المساوية للدائرة م م الا انها تخرج على مواز ل ه للمعور و م وموجود تحت هذا
المستقيم وعلى بعد منه يساوى قطر الدائرة المتحركة
واذن يكون هذا المنتشر سيكلويدًا مساويًا للدائرة

(٢١٤)

ويمكن اثبات ذلك بدون معرفة طول نصف قطر الانحناء لانه كان م ن مماس للمنحنى و م ح
فى م فكذلك ح ط مماس فى ح للسيكلويد و ح ه واذى يكون هذا المنحنى الاخير
مسار التقاطعات المتتالية للعمد المتتالية للسيكلويد و ح و بناء عليه يكون منتشره
بـ١٩٨ ويمكن الوصول الى ذلك بالحساب لان

$$\frac{ص}{صه} = \frac{صه}{صه} \quad , \quad \sqrt{1 - \frac{صه}{صه}} = \frac{صه}{صه}$$

وبوضع هذين المقدارين فى المعادلتين

$$٠ = \frac{صه}{صه} (صه - صه) + \frac{صه}{صه} + ١$$

$$٠ = \frac{صه}{صه} (صه - صه) + ل - صه$$

نؤل المعادلة الاولى منهما الى

$$٠ = \frac{صه}{صه} (صه - صه) - \frac{صه}{صه}$$

أو

$$٠ = صه - صه - \frac{صه}{صه}$$

أو

$$(١) \quad صه = - صه$$

ونؤل الثانية الى

$$٠ = \sqrt{1 - \frac{صه}{صه}} (صه - صه) + ل - صه$$

وبتعويض صه بمقداره يستخرج

$$صه = ل + صه - \sqrt{1 - \frac{صه}{صه}}$$

وبادخال صه تحت علامة الجذر الذى يجب ان تغير اشارة حيث ان صه سالب يحدث

$$(٢) \quad صه = ل - صه - \sqrt{1 - \frac{صه}{صه}}$$

(٢١٥)

وبوضع مقدارى (١) و (٢) فى معادلة السيكلويدى

$$(٣) \quad \sqrt{2\alpha - \alpha^2} - \frac{\alpha - \alpha^2}{\alpha} = \alpha \cos \theta$$

نحصل معادلة المنتشرة

$$(٤) \quad \sqrt{2\alpha - \alpha^2} + \frac{\alpha + \alpha^2}{\alpha} = \alpha \cos \theta$$

فلنفرض الآن اننا جعلنا المحورين هما المستقيمان $هـ س$ و $هـ ص$ وفرضنا أن $س$ و $ص$ هما الاحداثيان الجديدان لنقطة حيثما اتفق θ من المنتشر حيث ان

$$\alpha = ط و د هـ = \alpha$$

فيكون

$$ل = ود - دس = ط - \alpha$$

$$\alpha = ل - ل = ل - \alpha = \alpha - \alpha$$

وبوضع مقدارى ل و α هذين فى المعادلة (٤) تصبح معادلة المنتشر بالنسبة للمعورين الجديدين هي

$$\sqrt{2\alpha - \alpha^2} + \frac{\alpha + \alpha^2}{\alpha} = \alpha \cos \theta$$

أو

$$\alpha = \alpha - (\alpha - \alpha \cos \theta) = \alpha (1 - \cos \theta)$$

وبسبب أن كل قوسين مكملين لبعضهما يكون جيباتهما مساوية فى المقدار المطلق ومختلفتين فى الإشارة يكون

$$\alpha = \alpha \cos \theta - \sqrt{2\alpha - \alpha^2}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٣) يرى أن منتشر السيكلويد سيكلويد مساو له وموضوع بالنسبة للمعورين $س$ و $ص$ كوضع السيكلويد المقروض بالنسبة للمعورين الاصليين

(٢١٦)

في طول قوس من سيكلويد

بـ ١٩٩ المستقيم م د الذي هو ضعف ط د هو نصف قطر الانحناء في نقطة م من السيكلويد
الاتساري أو المماس في نقطة د للسيكلويد المنتشر وزيادة على ذلك أن نصف قطر الانحناء
في نقطة و معدوم حيث أن العمودي م ط معدوم في هذه النقطة وبما أن قوس المنتشر
مساو لا فرق بين نصفي قطري الانحناء المتطرفين فيكون

$$\text{قوس } و د = م د = م د = ط$$

وبالعود إلى السيكلويد المتروك يمكن أن يقال إن القوس ح م يساوي ح م د ولنبحث
الآن عن مقدار هذا القوس بدلالة أحد اثني نهايتيه فنقول إن

$$\text{قوس ح م} = م د = ح م د = \sqrt{2} \times م د$$

وحيث أن م د = ح د - ح د فيكون

$$\text{قوس ح م} = \sqrt{2} \times (ح د - ح د)$$

بـ ٢٠٠ يمكن أيضاً تحصيل هذه النتيجة بالحساب لانتا إذا فرضنا أن ح م = ح د قوس محسوب
بالابتداء من الرأس ح يكون

$$\sqrt{1 + \frac{6^2}{6^2}} = \pm 6$$

لكن

$$\frac{6}{6} = \frac{6}{6 - 6}$$

فأذن يكون

$$\sqrt{1 + \frac{6^2}{6^2}} = \pm 6$$

وحيث أن القوس ح م يأخذ في النقص متى ترايد ح د فيجب أخذ إشارة - وكلاية

$$6 - \sqrt{1 + \frac{6^2}{6^2}} = \frac{6}{6 - 6}$$

واذن يكون

$$ش + \overline{ش} = ٢٧٢ - ٢٧٢ = ٠$$

أو

$$ش + \overline{ش} = ٢٧٢ - ٢٧٢ = ٠$$

وحرف ش رمز ثابت يعين يجعل $ش = ٢٧٢$ وملاحظة أن $ش$ يكون انذاك معدوما
واذن يكون $ش = ٠$. ويوجد المقدار المتقدم وهو

$$\overline{ش} = ٢٧٢ - ٢٧٢ = ٠$$

يلاحظ ان اذا فرض أن $ش = ٠$ يكون

$$\overline{ش} = ٢٧٢ - ٢٧٢ = ٠$$

فاذن يكون

$$\overline{ش} = ٢٧٢ - ٢٧٢ = ٠$$

ويعلم من ذلك أن قوس السيكلويد باكله يساوى أربعة أمثال قطر الدائرة الراسمة

الفصل الخامس

في انحناء المنحنيات المستوية

في مقدار نصف قطر الانحناء حينما يكون المتغير
الغير المتعلق حينما اتفق

بشأنه لما كان s متغيرا غير متعلق قل وجدنا أن

$$\frac{\frac{r}{r} \left(\frac{r}{r} + 1 \right)}{\frac{r}{r}} = \text{خ}$$

فلنفرض الآن ان s و r دالتان لمتغير آخر وليكن t ونبحث بهذا الفرض عن

مقدار خ فن المعلوم (بالحد) ان $\frac{r}{r}$ لا تتغير صورتها وان يجب أن تعوض $\frac{r}{r}$

بالمقدار $\frac{r}{r} - \frac{r}{r}$ وان يكون

$$\frac{\frac{r}{r} \left(\frac{r}{r} + 1 \right)}{\frac{r}{r} - \frac{r}{r}} = \text{خ}$$

أو

$$(1) \quad \frac{\frac{r}{r} (r + r)}{r - r} = \text{خ}$$

وهذا القانون فيه تفاضلا s و r مأخوذاً باعتبار t متغيرا غير متعلق

مثال - السيكلويدمين باجتماع المعادلتين

$$s = (n - 1) \quad \text{و} \quad r = (1 - n) \quad \text{حتا} \quad (n)$$

(٢٢٠)

ويجعل و - ل = و لاجل الاختصار يكون

$$س = و ح ا و , ص = و ح ا و$$

ومن هنا ينتج بملاحظة ان و = و

$$س = و ح ا و = و ح ا و و ح ا و ,$$

$$ص = و ح ا و + و ح ا و و ح ا و ,$$

$$و = و ح ا و = و ح ا و و ح ا و و ح ا و ,$$

$$و = و ح ا و + و ح ا و و ح ا و و ح ا و$$

واذن يكون

$$و = و ح ا و = و ح ا و و ح ا و + و ح ا و و ح ا و + و ح ا و و ح ا و$$

$$+ و ح ا و و ح ا و = و ح ا و (و ح ا و + و ح ا و)$$

$$+ و ح ا و و ح ا و (و ح ا و + و ح ا و)$$

ومن بعد الاختصار يحدث

$$(٢) \quad و = و ح ا و + و ح ا و = و ح ا و + و ح ا و$$

وبمثل ذلك يكون

$$س = و ح ا و - و ح ا و = و ح ا و$$

$$= (و ح ا و - و ح ا و) (و ح ا و + و ح ا و + و ح ا و + و ح ا و)$$

$$- (و ح ا و + و ح ا و) (و ح ا و - و ح ا و - و ح ا و - و ح ا و)$$

$$= و ح ا و (و ح ا و - و ح ا و - و ح ا و - و ح ا و - و ح ا و + و ح ا و)$$

$$+ و ح ا و (و ح ا و + و ح ا و) + و ح ا و (و ح ا و + و ح ا و + و ح ا و + و ح ا و)$$

وبالاختصار يحدث

$$(٣) \quad و = و ح ا و - و ح ا و = و ح ا و - و ح ا و + و ح ا و + و ح ا و$$

فان اوضع المقداران (٢) و (٣) في قانون (١) يحصل

(٢٢١)

$$\frac{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}6r + \frac{r}{r}6)}{\frac{r}{r}6r + \frac{r}{r}6r - \frac{r}{r}6r} = \text{خ}$$

أو

$$(٤) \quad \frac{\frac{r}{r}(\frac{r}{r}6r + \frac{r}{r}6)}{\frac{r}{r}6r - \frac{r}{r}6r + \frac{r}{r}6} = \text{خ}$$

ويمكن تحصيل هذه النتيجة بكيفية أبسط من الكيفية المتقدمة وذلك بتطبيق المحور مرة على $وم$ ولذلك يلزم جعل $ل = و$ وبذلك يكون

$$6r = 6r \quad و \quad 6r = 6r$$

$$6r = 6r - 6r \quad و \quad 6r = 6r - 6r$$

بذلك نجد أحياناً يستعمل في قانون نصف قطر الانحناء بدل نصف القطر البؤري $و$ مقداره العكسي فإذا فرضنا أن

$$\frac{1}{u} = و$$

يكون

$$\frac{6r - 6r}{u} = 6r \quad و \quad \frac{6r}{u} = 6r$$

وإذاً يكون

$$\frac{\frac{r}{r}(\frac{6r}{r} \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u})}{\frac{6r}{r} \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u}} = \frac{\frac{r}{r}(\frac{6r}{r} \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u})}{\frac{6r - 6r}{r} + \frac{6r}{r} \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u}} = \text{خ}$$

أو

$$(٥) \quad \frac{\frac{r}{r}(\frac{6r}{r} + \frac{1}{u})}{(\frac{6r}{r} + \frac{1}{u})u} = \text{خ}$$

(٢٢٢)

مثالان

بمسند (الاول) تطبيق على المنحنيات ذات الدرجة الثانية — المعادلة العمومية للمنحنيات ذات الدرجة الثانية منسوبة الى احدى بؤرها والى المحور البؤرى هي

$$\frac{c}{h+1} = 2 \quad \text{أو} \quad \frac{c}{h+1} = 2$$

وفى هذه الحالة يكون

$$6 = 2 - \frac{h}{c} \quad \text{و} \quad 6 = 2 - \frac{h}{c}$$

ويوصل قانون (٥) الى

$$\frac{\left[\frac{r}{c} + \frac{(h+1)}{c} \right]}{\left[\frac{h}{c} - \frac{(h+1)}{c} \right]} = \frac{r}{c}$$

أو

$$\frac{r}{c} = \frac{(h+1)}{(h+1)}$$

(الثاني) تطبيق على الخزون اللوغاريتمى الذى معادلته $h = 2 - \frac{r}{c}$ من هذه المعادلة يستخرج

$$6 = 2 - \frac{r}{c} \quad \text{و} \quad 6 = 2 - \frac{r}{c}$$

وبوضع هذين المقدارين فى قانون (٤) يحدث

$$\frac{\left[\frac{r}{c} + \frac{(r+1)}{c} \right]}{\left[\frac{r}{c} - \frac{(r+1)}{c} \right]} = \frac{r}{c}$$

أو

$$2 = \frac{r}{r+1}$$

وليكن μ العمود ، و λ تحت العمود في النقطة المعبرة عن الثلث لـ μ القائم الزاوية يحدث

$$\overline{f + f' + f''} = \overline{f} + \overline{f'} + \overline{f''} = f + f' + f''$$

لكن

طاوم ك = طاوم ص = م

• قائدین ہوں

$$x = \sqrt{m+1} \cdot 2 = 2m$$

ومن هنا يعلم أن نهاية تحت العمود وهي L هي مركز الانحناء
ولاجل إيجاد معادلة المنتشر نأخذ محوراً قطبياً جديداً وليكن O بحيث يكون M على
الأول بقدر الزاوية L ونفرض أن L نقطة
حيثما التقط من المسار وليكن $L = \infty$ شكل ٤١
 $L = O$ فيكون

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

لكن

$$\frac{b}{r} + \omega = \omega + \bar{\omega}$$

فازن تكون معاداة المتشرهى

$$\left(\frac{1}{r} - 1\right) r \quad \text{و } \quad h_m \times h_m = 2$$

وحيث كانت الزاوية \angle اختيارية فنعين هذه الكمية بحيث يكون

$$= \left(\frac{b}{r} - 1\right) r$$

وبذلك يكون

$$\frac{\text{لوم}}{r} - \frac{p}{r} = 1 \quad \text{أو} \quad \text{لوم} = \left(\frac{p}{r} - 1\right) r$$

$$\frac{د}{هـ} = \frac{و}{ز}$$

ومن هنا يتضح أن المنتشر هو حازون أو غاريبى يساوى الاول الا انه مخالف له فى الوضع

فى انحناء المنحنىات المستوية

يتأكد يجب اعتبار انحناء محيط الدائرة ثابتاً فى جميع نقطه وأكبر كلما كان نصف قطره س أصغر أى كلما كان المقدار العكسى $\frac{1}{س}$ أكبر ولذا قد جعلت الكمية $\frac{1}{س}$ مقياساً لانحناء الدائرة

ويمكن تصور هذه العبارة بطريقة أخرى أوضح وذلك باعتبار دائرة مماسة لمستقيم فى نقطة من نقطه وتبعد المركز شيئاً فثبات على العمود المقام على هذا المستقيم من النقطة المذكورة فالدائرة المتحركة تصير فى كل وضع من أوضاعها

محصورة بين المستقيم الثابت والدائرة السابقة لها وبناء على ذلك تقرب شيئاً فثبات من المستقيم كلما كبر نصف قطرها

إذا تقررهذا فليكن م س و م س مماسين لمحيط دائرة نصف قطرها م س يساوى س ولنفرض ان ط س = م س فيكون

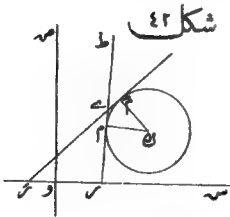
$$\text{قوس م س} = \text{قوس م م}$$

حيث كانت زاوية م ل م تساوى ط س م واذن يكون

$$\frac{1}{س} = \frac{\text{قوس م م}}{\text{قوس م س}}$$

ومن هنا يعلم ان انحناء الدائرة يساوى خارج قسمة الزاوية الواقعة بين مماسين على القوس المحصور بين نقطتى التماس

بالتأكد ولنتبع الآن منحنىاً حيثما اتفق ح م م س ولكن نقطة ح نقطة ثابتة مأخوذة على هذا المنحنى ولنفرض ان ح م = س و م م = ف س وان س الزاوية م س س و س الزاوية م س س و ف الفرق بين هاتين الزاويتين أعنى الزاوية ط س م فإذا كان المنحنى



محيط دائرة فان الانحناء في نقطة م يكون هو $\frac{1}{r}$ وتكون هذه النسبة غير متعلقة بالكمية فـ

واذا كان المنحنى حيثما اتفق فان النسبة

$\frac{1}{r}$ التي تتغير مع تغير فـ تسمى

الانحناء المتوسط للقوس مـ مـ ونصف

قطر الدائرة التي فيها يكون بينهما المماسان

الممدودان من نهايتي قوس يساوى فـ

زاوية تساوى فـ يسمى نصف قطر

الانحناء المتوسط ونصف قطر هذه الدائرة

هو $\frac{1}{r}$ فاذا فرضنا الآن ان نقطة مـ

تقرب قربا لانها يامن نقطة م فان النسبة $\frac{1}{r}$ تميل الى $\frac{1}{r}$ التي يقال لها الانحناء المنحني

في نقطة م فاذا تصورنا دائرة انحناءها ثابت وفرضنا ان فـ نصف قطرها يكون

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ أو } \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

فاذا أخذ على الجزء السفلي من العمودى طول مـ = فـ تكون الدائرة المرسومة بجعل نقطة

مـ مركزا ونصف قطرها مـ هي دائرة الانحناء ونصف قطر هذه الدائرة ومركزها يكونان

هما نصف قطر ومركز الانحناء في نقطة مـ

والزاوية مـ الواقعة بين المماسين الممدودين من نهايتي قوس صغير جدا تسمى زاوية التماس

وحينئذ يمكن أن يقال ان انحناء أى منحن يساوى زاوية التماس مقسومة على تفاضل القوس

في بيان ان دائرة الانحناء هي الدائرة الالتصاقية

بشأن دائرة الانحناء هي نفس الدائرة الالتصاقية المعينة بموجب نظرية التماسات لان

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r} + 1}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r} + 1 \right) = \frac{1}{r} + 1$$

وَأُذُنُ يَكُونُ

$$\frac{\left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right) \frac{\frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1}} + 1}{\frac{r_2}{r_1}} = \text{نخ} = \frac{r_2}{r_1}$$

أَوْ

$$\frac{\frac{r_2}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)}{\frac{r_2}{r_1}} = \text{نخ}$$

ومن هنا ينضح ان نخ أى نصف قطر الانحناء يساوى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وبناء على

هذا تكون دائرة الانحناء منطبقة على الدائرة الالتصاقية

بذلك قد أثبتنا أن نصف قطر الانحناء هو عين نصف قطر الدائرة الالتصاقية باستنتاج مقدار

هذا الأخير من مقدار نصف قطر الانحناء ويمكن تحصيل هذه النتيجة باستعمال السيل العكسى

أعنى باستنتاج مقدار نصف قطر الانحناء من مقدار نصف قطر الدائرة الالتصاقية لأن نصف قطر

الدائرة الالتصاقية فى نقطة م هو

$$\frac{\frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} + 1} : \frac{\frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} + 1} = \frac{\frac{r_2}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)}{\frac{r_2}{r_1}} = \text{نخ}$$

لكن

$$r_2 = \frac{r_2}{r_1} + 1 \quad , \quad r_2 = \frac{r_2}{r_1} + 1$$

$$r_2 = \left(\frac{r_2}{r_1} + 1 \right) \frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{r_2}{r_1}}{\frac{r_2}{r_1} + 1}$$

(٢٢٧)

$$\frac{ص6}{ع6} = فح$$

واذن يكون

في مقدار نصف قطر الانحناء في حالة الاحداثيات القطبية

بنفسه لاجل ايجاد مقدار نصف قطر الانحناء في حالة الاحداثيات القطبية نستعمل القانون

فح = $\frac{ص6}{ع6}$ وزمر بجرف د زاوية ميل المماس في نقطة م على نصف القطر البورى

فيكون



$$\frac{د6}{و6} = طاء$$

لكن

$$د = ع - و$$

فاذن يكون

$$(١) \quad طاء = (و - ع) \cdot \frac{و6}{د6}$$

ومن هنا نستنتج ان

$$طاء = \frac{د6 - ع6}{(و - ع)6} = \left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) 6$$

$$\frac{ع6}{د6} - 1 = طاء (و - ع) \cdot \frac{و6}{د6} \cdot \left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) 6$$

لكن من معادلة (١) يحدث

$$طاء (و - ع) = \frac{1}{\left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) + 1}$$

واذن يكون

$$(٢) \quad \frac{\left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) \frac{و6}{د6} - \left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) + 1}{\left(\frac{و6}{د6} \cdot \frac{و6}{د6} \right) + 1} = \frac{ع6}{د6}$$

(٢٢٩)

تمرينات

أنصاف أقطار انحناء المنحنيات الآتية

$$١ \quad ٢٢ = ٢٢ \quad \text{فخ} = \frac{٢(٢ + ٢٢)}{٢٢} = ٢$$

$$٢ \quad ٢ = ٢ \quad \text{فخ} = \left(\frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} \right) \frac{٢}{٢} = ٢$$

$$٣ \quad ٢ = ٢ \quad \text{فخ} = \frac{٢(٢ \pm ٢)}{٢(٢ \pm ٢)} = ٢$$

$$٤ \quad ٢ = ٢ \quad \text{فخ} = \frac{٢}{٢} = ٢$$

الفصل السادس

في المنحنيات المضاعفة الانحناء

في معادلتى المماس

باعتبار المنحنيات المضاعفة الانحناء هي التي جميع نقاطها غير موجودة في مستوى واحد والمنحنى المضاعف الانحناء يكون مبينا كما لا يخفى بمعادلتين مثل

$$(1) \quad (s, r, c) = 0$$

$$(2) \quad (s, r, c) = 0$$

وهما معادلتا سطحين يمر كل منهما بمبدأ المنحنى

وفي العادة يجعل السطحان المساعدان اسطوانتين موازيتين للمعاور واذا ذلك يكون المنحنى مبينا بمعادلتين لا تشتمل كلتاهما الا على متغيرين فقط

باعتبار ولاجل تحصيل معادلتى المماس لنحن من نقطة كنقطة م نجعل في أول الامر عن

معادلتى قاطع مثل م م فاذا فرضنا أن

s, r, c و c احداثيات نقطة م شكل ٤٦

وان s, r, c و c احداثيات نقطة م

و $c + c$ احداثيات نقطة م

تكون معادلتا القاطع م م هما

$$s - s = \frac{c - c}{c - c} \quad (s - s) \quad و$$

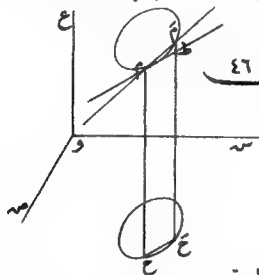
$$c - c = \frac{c - c}{c - c} \quad (c - c)$$

و s, r, c و c رموز للاحداثيات الجارية

فاذا قربت نقطة م قرب الانها لم يكن نقطة م يصير القاطع م م عند النهاية عملا للمنحنى

في نقطة م ويميل العاملان الزاويان $\frac{c}{c}$ و $\frac{c}{c}$ الى $\frac{c}{c}$ و $\frac{c}{c}$ و $\frac{c}{c}$

وتكون معادلتا المماس هما



(٢٣١)

$$(١) \quad \left\{ \begin{array}{l} ص - ص = \frac{ص}{ص} (ص - ص) , \\ ع - ع = \frac{ع}{ص} (ص - ص) \end{array} \right.$$

وفيما $\frac{ص}{ص}$ و $\frac{ع}{ص}$ مستقنا ص و ع بالنسبة للمتغير ص فاذا قمنا بتان
المعادلتان على بعضهما توحد معادلة مسقط المماس على المستوى ص و هي

$$ص - ص = \frac{ص}{ع} (ع - ع)$$

ومن هذه المعادلات يتضح ان مسقط المماس على كل مستوا حداني مماس لمسقط المنحنى على هذا
المستوى وغير ذلك فهذا ما ينتج من أنه حينما تقع نقطة م على نقطة ع تقع نقطة ح على
نقطة ح

بالتد العاملان التفاضليان $\frac{ص}{ص}$ و $\frac{ع}{ص}$ يحصل عليهما بأخذ تفاضل المعادلتين
(١) و (٢) فيحدث

$$(١) \quad \left\{ \begin{array}{l} ٠ = \frac{ص}{ص} \frac{ص}{ع} + \frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} \\ ٠ = \frac{ع}{ص} \frac{ص}{ع} + \frac{ص}{ص} \frac{ص}{ص} + \frac{ص}{ص} \end{array} \right.$$

وباستخراج $\frac{ص}{ص}$ و $\frac{ع}{ص}$ من هاتين المعادلتين ووضعهما في معادلتى (١) توجد
معادلتا المماس ويمكن الوصول اليهما كذلك بحذف $\frac{ص}{ص}$ و $\frac{ع}{ص}$ من المعادلات

(١) و (١) فن معادلتى (١) يستخرج

$$\frac{ص - ع}{ص - ص} = \frac{ع}{ص} , \quad \frac{ص - ص}{ص - ص} = \frac{ص}{ص}$$

وبوضع هذين المقدارين في معادلتى (١) توحد هاتان المعادلتان

(٢٣٢)

$$(ب) \left\{ \begin{aligned} & \frac{ك}{م} = \frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح} \\ & \frac{ك}{م} = \frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح} \end{aligned} \right.$$

ومن هنا يعلم أنه يتحصل على معادلتى المماس بتعويض التفاضلات ك ص و ك ح و ك ع
الداخله فى المعادلتين

$$\begin{aligned} & \frac{ك}{م} = \frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح} \\ & \frac{ك}{م} = \frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح} \end{aligned}$$

بالتفريق م - م و م - م و م - م

في زاويا ميل المماس على المحاور

بمساعدة لنفرض الآن ان المحاور متعامدة وزمرز بجروف ل و ع و ك لزاويا ميل المماس
على المحاور الاحداثيه م و م و م و م في رسم م ط في شبه المنحرف م ح م
الذى ضلعاها المتوازيان هما م ح = م ح و م ح = م ح + م ح موازيا للخط م ح والرمز
بجرف ك لزاوية م م ط أعني زاوية تميل القاطع م م على المحور و ع يحدث من
الثلث م م ط

$$\frac{ك}{م} = \frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح}$$

وبفرض م متغيرا غير متعلق يمكن أن يكتب

$$\frac{\frac{ك}{م}}{\frac{ك}{م}} = \frac{\frac{ك}{ص} + \frac{ك}{ع} + \frac{ك}{ح}}{\frac{ك}{م}}$$

(٢٣٣)

ففي انطبقت نقطة م على نقطة م يصير القاطع مماسا وتوّل لـ الى لـ ويكون

$$\frac{\frac{ع}{ص}}{\frac{ع}{ص} + \frac{ص}{ع} + \frac{ع}{ص}} = \text{حتا}^{\text{ك}}$$

أو

$$\frac{ع}{ص} = \text{حتا}^{\text{ك}}$$

فإذا كان ع < ص أي إذا زاد ع حينما يزيد المتغير الغير المتعلق ص يكون حتا < .
وتكون لـ > ط وإذا كان الامر بالعكس بأن كان ع > ص يكون حتا > .
وتكون لـ < ط

وبمثل ذلك يوجد حتال و حساء بحيث تعلم الزوايا المطلوبة بالقوانين

$$(ج) \left\{ \begin{array}{l} \text{حال} = \frac{ع}{ص} \\ \text{حساء} = \frac{ص}{ع} \\ \text{حتا}^{\text{ك}} = \frac{ع}{ص} \end{array} \right.$$

فإذا فرض ان القوس م م الصغير جداهو ص يوجد كما يشاهد قريبا ان شاء الله تعالى في (٢١٨)

$$\frac{ع}{ص} = \text{حتا}^{\text{ك}}$$

وتوّل القوانين المتقدمة الى

$$(د) \frac{ع}{ص} = \text{حال} , \frac{ص}{ع} = \text{حساء} , \frac{ع}{ص} = \text{حتا}^{\text{ك}}$$

(٣٠) تفاضل - اول

(٢٣٥)

$$\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} = \text{فسر} = \overline{\text{فسر} + \text{فسر} + \text{فسر}}$$

وحيث إذا رمزنا بحرف ح لمحيط المضلع يكون

$$\left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} \right] \text{ح} = \text{ح}$$

فإذا مال فسر الى الصفر مال $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ و $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ الى $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ و $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ ويمكن كتابة

$$\overline{1 + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right)} = \overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)}$$

وحرف ل رمز الالة تنعدم حينما ينعدم فسر واذن يكون

$$\left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} \right] \text{ح} = \text{ح} + \left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} \right)} \right] \text{ح}$$

وبعوجب نظرية (بثلد) يكون

$$\text{نها} = \left(\frac{1}{\text{فسر}} \right) \text{ح}$$

واذن يكون

$$\left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} \right] \text{نها} = \text{نها}$$

ولنفرض الآن ان سر هو المتغير الغير متعلق فحيث انه يمكن اعتبار $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ و $\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}}$ داليتين للمتغير سر فلنتغير المتحني هو المنسوب الى احد ايات قائمة ومعادلته هي

$$\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} = \text{ص}$$

وليكن و = ح و ط = ز بفرض سر يتغير من ح الى ز يكون

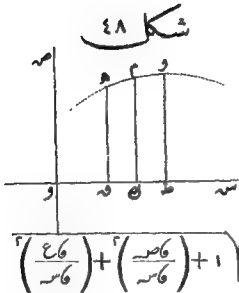
$$\left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} \right] \text{ح} = \left[\overline{\left(\frac{1}{\text{فسر}} + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) + \left(\frac{\text{فسر}}{\text{فسر}} \right) \right)} \right] \text{ز}$$

(٢٣٦)

لكن نهاية مح (ص ف م) هي المساحة
ه و ق ط فيعلم من ذلك ان نهاية ح والمساحة
ه و ق ط ميينان بعدد واحد وهذا العدد هو
الدال على طول القوس ح د

ب ٢١٨ لنفرض الآن ح م = ص وليكن
و ل = م فيكون (باعتبار المقدار الرقي)
قوس ح م = المساحة ه م ل ق

وبناء على ذلك يكون



أو

$$6\text{ م} = 6\text{ م} + 6\text{ ص} + 6\text{ ع}$$

في نهاية النسبة الكائنة بين قوس ووتره

ب ٢١٩ يستتج بسهولة مما تقدم كما أثبتناه في المنحنيات المستوية ان نهاية النسبة الواقعة بين
قوس ووتره هي الواحد لانا لو فرضنا القوس م م = ف ص يكون

$$\frac{\frac{6\text{ ص}}{6\text{ م}}}{\left(\frac{6\text{ ع}}{6\text{ م}} \right) + \left(\frac{6\text{ ص}}{6\text{ م}} \right) + 1} = \frac{6\text{ ف}}{6\text{ ف} + 6\text{ ص} + 6\text{ ع}} = \frac{6\text{ قوس}}{6\text{ م}}$$

وبالتأمل يرى ان نهاية كل من بسط ومقام الطرف الثاني هي
فاذن يكون

$$1 = \frac{6\text{ قوس}}{6\text{ م}} \text{ نها}$$

الفصل السابع

في السطوح المخنية والخطوط المضاعفة الانحناء

في معادلة المستوى المماس

ينشأ لتكن م (س و ص و ع) نقطة حيثما تنفق مأخوذة على سطح معادلته

$$(1) \quad 0 = (ع و ص و ع)$$

فيمكن أن يصور م ورخصيات لانهاية لعدد هذه النقطة وجميع المماسات المدودة لهذه المنحنيات من نقطة م تكون موجودة في مستو واحد نسميه المستوى المماس للسطح في نقطة م ولا ثبات ذلك نفرض أن

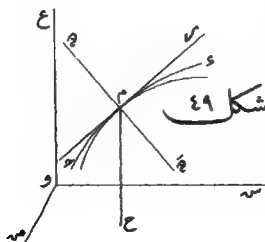
$$(2) \quad 0 = (ع و ص و ع)$$

معادلة سطح جديد مار بنقطة م فيكون خط تقاطع السطحين (١) و (٢) منحنيًا حرم موجودا على السطح (١) والمماس له م في نقطة م يكون ممينا بموجب ما ذكرناه في الفصل السابق بالمعادلتين

$$(3) \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ص}{ص} + \frac{ع}{ع} = 0 \quad \text{و} \quad (3)$$

$$(4) \quad \frac{ع}{ع} = \frac{ص}{ص} + \frac{ع}{ع} = 0 \quad \text{و} \quad (4)$$

والمعادلة (٣) معتبرة على انفرادها تين مستويا يمر دائما بالمماس م مهما كان هذا المماس حيث ان معادلة هذا المستوى لا تتعلق أصلا بالدالة ϕ فاذن تكون جميع المماسات المدودة للسطح من نقطة م موجودة في المستوى (٣) الذي هو المستوى المماس للسطح في نقطة م



(٢٣٨)

في معادلتى العمودى

٢٣٨د العمودى على السطح فى نقطة م هو المستقيم المار بهذه النقطة وعمود على المستوى المماس وحيث كان هذا المستقيم ماراً بنقطة م (سـ و صـ و ع) فتكون معادلته بالصورة

$$سـ - سـ = (ع - ع) \quad و \quad صـ - صـ = (ع - ع)$$

ولتعيين أ و ب يلاحظ أن هذا المستقيم عمود على المستوى المماس الذى معادلته

$$(١) \quad \frac{ك}{ع} = (سـ - سـ) + \frac{ك}{صـ} (صـ - صـ) + \frac{ك}{ع} (ع - ع) = ٠$$

ولذا يلزم أن يكون

$$\frac{ك}{ع} : \frac{ك}{صـ} = ١ \quad و \quad \frac{ك}{ع} : \frac{ك}{ع} = ٠$$

واذن تكون معادلتا العمودى هما

$$(٢) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ك}{ع} = (سـ - سـ) + \frac{ك}{صـ} (ع - ع) \\ \frac{ك}{ع} = (صـ - صـ) + \frac{ك}{ع} (ع - ع) \end{array} \right.$$

وهاتان المعادلتان يمكن وضعهما هكذا

$$(٣) \quad \frac{ع - ع}{\frac{ك}{ع}} = \frac{صـ - صـ}{\frac{ك}{صـ}} = \frac{سـ - سـ}{\frac{ك}{ع}}$$

٢٣٨د يمكن إعطاء المعادلة المستوى المماس ولعادلتى العمودى صورة أخرى وذلك أن يعتبر ع دالة للمتغيرين سـ و صـ ويرمز بحرفى ع و ك للمشتقين الجزئيين للدالة ع بالنسبة للمتغير سـ وللمتغير صـ أعنى يجعل

$$ع = \frac{ع}{ك} \quad و \quad ك = \frac{ع}{صـ}$$

(٢٣٩)

فبأخذ تفاضل المعادلة

$$s = (e, v) = 0$$

على التوالي بالنسبة للمتغير s ثم بالنسبة للمتغير v يكون

$$0 = \frac{v}{e} + \frac{e}{v} \quad \text{و} \quad 0 = \frac{v}{e} + \frac{e}{v}$$

ومن هنا يستخرج

$$e = \frac{v}{e} : \frac{v}{e} = 1 \quad \text{و} \quad e = \frac{v}{e} : \frac{v}{e} = 1$$

وحيث أنه يمكن وضع معادلة المستوى المماس (أ) هكذا

$$e = (e - e) + (v - v) = 0$$

أو

$$(d) \quad e - e = (e - e) + (v - v)$$

ونؤمل معادلتنا (ب) المينتان للعمودى الى

$$(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} s - s = e + (e - e) = 0 \\ v - v = e + (e - e) = 0 \end{array} \right.$$

بـ ٢٣٣ إذا رمزنا بالحروف ل و ط لزاويا ميل العمودى على المحاور يكون

$$\text{حتال} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 + e^2}} \quad \text{و} \quad \text{حتا} = \frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}}$$

$$\text{حاط} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + e^2}}$$

فدرجة معادلة المستوى المماس بالنسبة لاحداثيات نقطة التماس

بـ ٢٣٤ معادلة المستوى المماس يمكن وضعها بالصورة

$$\frac{v}{e} + \frac{e}{v} = \frac{v}{e} + \frac{e}{v} + \frac{v}{e} + \frac{e}{v}$$

(٢٤٠)

فإذا كانت معادلة السطح جبرية وبدرجة m تكون المشتقات $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ دوال جبرية بدرجة $m-1$, وحيت قد يكون الطرف الاول دالة بدرجة $m-1$ بالنسبة لاجداثيات نقطة التماس , وأما الطرف الثاني فيظهر انه يكون بدرجة m بالنسبة لهذه الاجداثيات الا انه يمكن ان يولته الى الدرجة $m-1$ باعتبار معادلة السطح وفي الواقع لتكن معادلة السطح هي

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (x, y, z)$$

و n مجموع الحدود التي بدرجة m , و p مجموع الحدود التي بدرجة $m-1$, و q مجموع الحدود التي بدرجة $m-2$, وهلم جرا فيكون

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} + \dots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} + \dots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \dots$$

فإذا ضربت هذه المعادلات بالتناظر في x, y, z واضيفت بعد الضرب الى بعضها يحدث

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z + \dots$$

وبموجب الخاصية الشهيرة للدوال المتجانسة يحدث

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z = \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z + \dots$$

$$= \dots - \frac{\partial \phi}{\partial x} x - \frac{\partial \phi}{\partial y} y - \frac{\partial \phi}{\partial z} z - \dots$$

(131)

وحيث كانت النقطة (س، ص، ع) على السطح فيكون

$$= \dots + \psi + \psi + \psi$$

وحيث نؤمل المعادلة المتقدمة الى

$$\dots - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \epsilon + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \omega + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \sigma$$

و ينتج من ذلك ان معادلة المستوى المماس تولد الى

$$= \dots + \frac{s_6}{\frac{e_6}{e_6}} + \frac{s_6}{\frac{v_6}{v_6}} + \frac{s_6}{\frac{s_6}{s_6}}$$

وهذه المعادلة ليست الا بدرجة م - ١ بالنسبة لاجد اثبات نقطة التماس

مسائل تتعلق بالمستوى الخامس

بـ ٢٥ المطلوب ان يحدد النقطة (أ و ب و ج) مستويها لسطح معلوم
لتعين احداثيات نقطة التماس سه و صه و ع تكتب المعادلتان

(۱) ، $\bullet = (ع, ص, س)$

$$(r) = \dots + \psi_2 + \psi_1 + \frac{s_6}{26} + \frac{s_6}{56} + \frac{s_6}{56}$$

(والمعادلة الاولى معادلة السطح المعاوم)

وحيث كانت هاتان المعادلتان ثلاثاً مجاهيل فتكون المسئلة غير معينة كما هو معلوم واجتماع المعادلتين (١) و (٢) يبين مسار نقط التماس والمستقيمتين الواصلتين من النقطة (أ و ب و ج) الى نقط التماس المختلفة يتكون منها مخروط عموماً للسطح يتحصل على معادلتين بمخفف
سـ و صـ و ع من المعادلتين (١) و (٢) وهذه

$$(r) \quad \frac{7-6}{7-6} = \frac{1-0}{1-0} = \frac{1-0}{1-0}$$

التي تبين أحد الرواسم

فإذا كان السطح المعلوم بدرجة ثانية كان منحنى التماس مستويًا لأن معادلة (٢) المحققة بإحداثيات نقط التماس تكون إذاً بدرجة أولى وتكون دالة على مستوي

بـ^{٢٢٦} المطلوب أن يثبت مستوي ماس لسطح بحيث يكون موازيا لمستقيم معلوم لذلك نفرض أن

$$س = ا ع \quad و \quad ص = ب ع$$

هما معادلتنا المستقيم المعلوم فمن الواضح أنه إذا نقل المستوى المماس بالتوازي لنفسه إلى أن يمر بنقطة الاصل تكون معادلته هي

$$٠ = ع \frac{ك}{ع} + ص \frac{ك}{ك ص} + س \frac{ك}{ك س}$$

ويلمز انذاك أن يكون مشتقاً على المستقيم المعلوم وحينئذيو جد هذا الارتباط

$$(٤) \quad ٠ = ع \frac{ك}{ع} + ب \frac{ك}{ك ص} + ا \frac{ك}{ك س}$$

وهذه المعادلة تدل على سطح يمر بجميع نقط التماس وهي مع المعادلة (١) يدلان على منحنى تماس الاسطوانة المماس للسطح ورواسهما موازياً للمستقيم المعلوم

فاذا كانت معادلة (١) جبرية وبدرجة م تكون المعادلة (٤) بدرجة (م - ١) ومن هنا يعلم أن منحنى تماس الاسطوانة المرسومة على سطح بدرجة ثانية هو منحنى مستو ويتحصل على معادلة الاسطوانة المماسية بحذف س و ص و ع من المعادلتين (١) و (٤) والمعادلتين

$$س = ا (ع - ع) \quad و \quad ص = ب (ع - ع)$$

اللتين يدلان على مستقيم وازالاتجاه المعلوم ومار بنقطة من منحنى التماس

في المستوى الالتصاقى

بـ^{٢٢٧} ليكن حـ م منحنياً حيثما اتفق في الفراغ ولنفرض ان م و م' نقطتان قريبتان من بعضهما على هذا المنحنى فالمماس م' للمنحنى في نقطة م والنقطة م' يعينان مستويًا فالمستوى الالتصاقى هو نهاية المستوى مـ م' حيثما أتى نقطة م' وتطبق على نقطة م

(٢٤٣)

ويمكن أيضاً أن يقال أن المستوى الالتصاقى فى نقطة م هو المستوى الذى يمر بالنقطة م

وبالنقطتين م و م' القريبتين

من نقطة م على المنحنى متى أتت

النقطتان الأخيرتان وانطبقتا على م

وهذا التعريف موافق للاول اذ أن

المستقيم م م' يميل الى أن يصير مماساً

فى نقطة م متى قربت الثلاث نقط

من بعضها

بـ ٢٤٨ حيث أن المستوى الالتصاقى

للمنحنى فى نقطه م التى احداثياتها

س و ص و ع يجب أن يمر بهذه النقطة فتكون معادلته بهذه الصورة

$$(١) \quad ٠ = (س - س_١) + (ص - ص_١) + (ع - ع_١)$$

وغير ذلك فان معادلتى المماس هما

$$(٢) \quad \frac{ص - ص_١}{ص_١} = \frac{ع - ع_١}{ع_١} \quad \text{و} \quad \frac{س - س_١}{س_١} = \frac{ع - ع_١}{ع_١}$$

وحيث يجب أن يكون هذا المستوى موجوداً فى المستوى الالتصاقى فيجب مهمه ما كان س

و (س - س_١) أن يكون

$$٠ = (س - س_١) + \frac{ص - ص_١}{ص_١} + \frac{ع - ع_١}{ع_١}$$

أو

$$(٣) \quad ٠ = ع_١ + ص_١ + س_١$$

ولنفرض لآن أن س + ف + ص و ص + ف + ع و ع + ف + س احداثيات النقطة م

فبوضع هذه الاحداثيات فى معادلة (١) بدلا عن س و ص و ع توجد المعادلة

$$(٤) \quad ٠ = ع + ص + س$$

لكن يمكن اعتبار س و ص و ع دوال للتغير جديد مثل س بحيث اذا فرض ان ل

و س و ط كميات تتعلم حينما يتعلم ف س يكون

وبمثل ذلك يوجد

$$\frac{ع\text{ صه} - ع\text{ صه}}{ع\text{ صه} - ع\text{ صه}} = \frac{٢}{١}$$

وحيث كان أحد المعاملات ١ و ٢ و ٣ اختياريا فيؤخذ

$$٣ = ع\text{ صه} - ع\text{ صه}$$

واذن يكون

$$١ = ع\text{ صه} - ع\text{ صه} = ع\text{ صه} - ع\text{ صه}$$

وحيث تكون معادلة المستوى الالتصاقى هي

$$(٦) \quad \begin{cases} (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) \\ + (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) \\ + (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) (ع\text{ صه} - ع\text{ صه}) = ٠ \end{cases}$$

وهذا طريقة لوضع هذه المعادلة وهي أن تكتب الكسور

$$\frac{ع\text{ صه}}{ع\text{ صه}}, \frac{ع\text{ صه}}{ع\text{ صه}}, \frac{ع\text{ صه}}{ع\text{ صه}}$$

ثم يطرح كل من هذه الكسور من الكسر السابق له فتكون بسوط هذه البواقي هي معاملات

$$ع - ع, ع - ع, ع - ع$$

في زوايا ميل المستوى الالتصاقى على

المستويات الاحداثية

٢٢٩. اذا رمزنا بالرموز د و د' و د'' للزوايا التي يكونها عمود م ح على المستوى الالتصاقى مع المحاور د د', د د'', وهي تساوى بالتناظر لزوايا ميل العمود المذكور على المستويات د د', د د'', د د'' يكون

$$(١) \quad \frac{١}{د} = \frac{١}{د'} \text{ و } \frac{١}{د} = \frac{١}{د''} \text{ و } \frac{١}{د} = \frac{١}{د''}$$

وذلك يجعل

$$٢ = ١ + ٢ + ٣$$

أعني

$$(ب) \left\{ \begin{aligned} ٢ &= (١ - ٢ + ٣) + (٢ - ٣ + ٤) + (٣ - ٤ + ٥) + \dots \\ &+ (١ - ٢ + ٣) + \dots \end{aligned} \right.$$

بمقدار ٢ يمكن وضعه بصورة أخرى فيجعل

$$١ = ١, ٢ = ٢, ٣ = ٣, ٤ = ٤, \dots$$

$$١ = ١, ٢ = ٢, ٣ = ٣, ٤ = ٤, \dots$$

يكون

$$٢ = (١ - ٢ + ٣) + (٢ - ٣ + ٤) + (٣ - ٤ + ٥) + \dots$$

أو

$$٢ = (١ + ٢ + ٣) - (٢ + ٣ + ٤) + (٣ + ٤ + ٥) - \dots$$

لكن إذا فرض أن ١ تفاضل القوس المنتهي بنقطة م يكون

$$١ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + \dots$$

فإذا أخذ تفاضل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير الغير متعلق م وقسم على ٢ حدث

$$١ = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + \dots = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + \dots$$

واذن يكون

$$٢ = [١ + (٢ - ٣) + (٣ - ٤) + (٤ - ٥) + \dots]$$

أو

$$٢ = ١ + (٢ - ٣) + (٣ - ٤) + (٤ - ٥) + \dots$$

ويمكن أيضاً أن يكتب

$$٢ = ١ + (٢ - ٣) + (٣ - ٤) + (٤ - ٥) + \dots$$

(وهذا ما يتحقق منه بالتحليل)

(٢٤٧)

$$(٥) \quad \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right) + \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right) + \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right) \quad \text{أو} \quad ٢ = ١$$

والتغير الغير متعلق حيثما اتفق في جميع هذه القوانين

في العمودى الاصلى

بالتد العمودى الاصلى هو العمودى الموجود فى المستوى الاتصاق

وهذا المستقيم يجب أن يكون عمودا على المماس م و على العمودى م ح ومن المتطابقة

$$١ = \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right) + \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right) + \left(\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}{\frac{١}{٦}} \right)$$

يستنتج

$$(١) \quad \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}}{\frac{١}{٦}} + \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}}{\frac{١}{٦}} + \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}{\frac{١}{٦}} = ٠$$

والمعادلة

$$١ = ٢ + ١ + ٠$$

يمكن كتابتها هكذا

$$(٢) \quad \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}}{\frac{١}{٦}} + \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}}{\frac{١}{٦}} + \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}{\frac{١}{٦}} = ٠$$

فينتج من المعادلتين (١) و (٢) ان المستقيم الذى يكرتن مع المحاور و بايجاب و سها
مناسبة للمقادير

$$\frac{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}}{\frac{١}{٦}} \text{ و } \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}}{\frac{١}{٦}} \text{ و } \frac{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}{\frac{١}{٦}}$$

عمود على المماس م و على العمودى م ح وحيث ان يكون هو المستقيم المطلوب وينتج من
ذلك ان معادلات العمودى الاصلى تكون هى

$$\frac{٢ - ٤}{\frac{٢}{٦} \frac{٤}{٦}} = \frac{٢ - ٦}{\frac{٢}{٦} \frac{٦}{٦}} = \frac{٢ - ٨}{\frac{٢}{٦} \frac{٨}{٦}}$$

الفصل الثامن

في انحناء الخطوط الفراغية وفي المنحنى البرمبي

في انحناء الخطوط الفراغية

بـ٢٢٢ زاوية التماس في منحنى شمالي هي كما في المنحنى المستوي هي الزاوية الزاوية الواقعة بين المماسين

المدودين من نهايتي قوس مم = فـ

صغير جدا والنهية التي تعيل اليها النسبة

ز
فـ متى تناقص فـ الى ما لا نهاية

(وهذه النهاية هي $\frac{ز}{فـ}$) تسمى

انحناء المنحنى وعكس الانحناء أي $\frac{فـ}{ز}$

يقال له نصف قطر الانحناء في نقطة م

وزرمز له بالرمز ρ

بـ٢٢٣ لتقدير ز نستخدم نقطة و مستقيمين و و مساويين لوحدة الطول

وموازيين بالتناظر للمماسين م م وتكون

$$1 = \frac{م}{م} \text{ و } 1 = \frac{م}{م} \text{ و } 1 = \frac{م}{م}$$

جيب تمام زوايا ميل م أو و على المحاور أي احدائيات نقطة و وتكون

أ و ب و ج احدائيات نقطة و فتصير زاوية و مساوية للزاوية ز

ويكون

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \text{ و } \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

وبملاحظة ان و = 1 يكون

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

(٢٤٩)

وعند النهاية وتعويض جيب الزاوية $\frac{1}{2}$ ز بهذه الزاوية تقسم يحدث

$$z = \sqrt{16^2 + 6^2 + 6^2}$$

واذن يكون

$$\left| \frac{16^2}{16^2} + \frac{6^2}{16^2} + \frac{6^2}{16^2} \right| = \frac{1}{\text{مخ}} = \frac{z}{16}$$

وتعويض ا، ب و ج بمقاديرها يحدث

$$\left| \left(\frac{16^2}{16^2} \right) + \left(\frac{6^2}{16^2} \right) + \left(\frac{6^2}{16^2} \right) \right| = \frac{1}{\text{مخ}}$$

وهذا مهما كان المتغير الغير المتعلق

بـ٢٣٤ بسبب القانون (د) من (بـ٢٣٤) يمكن أن يكتب

$$\frac{16^2}{1} = \text{مخ}$$

وبأخذ صورتين من التي وجدت في البند المذكور بقدر ا، يحدث أيضا

$$\text{مخ} = \frac{16^2}{(16^2) - (6^2) + (6^2) + (6^2)}$$

$$\text{مخ} = \frac{16^2}{(16^2 - 6^2 + 6^2 + 6^2) + (6^2 - 6^2 + 6^2 - 6^2) + (6^2 - 6^2 + 6^2 - 6^2)}$$

بـ٢٣٥ البند الاصلى م يكون مع المحاور زوايا ل، م و ن جيوب تمامها مناسبة للمقادير

$$\frac{16^2}{16^2}, \frac{6^2}{16^2}, \frac{6^2}{16^2}$$

ومن ذا يستنتج

$$\frac{16^2}{16^2} = \text{مخ} = \text{حتال}, \frac{6^2}{16^2} = \text{مخ} = \text{حتام}, \frac{6^2}{16^2} = \text{مخ} = \text{حتا}$$

(٢٣) تفاضل - اول

(٢٥٠)

وباستعمال معادلات العمودى م و هي

$$س-س = ع-ع \text{ و } ص-ص = ع-ع \text{ و } ع-ع = ع-ع$$

(وحرف ع رمز لبعده نقطة م عن نقطة حيثما اتفق (س و ص و ع) من هذا العمودى) يمكن حينئذ تبويض ح ت ل و ح ت م و ح ت ل بالمقادير التى وجدناها ووضع هذه المعادلات هكذا

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{ص}{ص} ع}{\frac{ص}{ص}} \text{ و } \frac{\frac{ص}{ص} ع}{\frac{ص}{ص}} \text{ و } \frac{\frac{ص}{ص} ع}{\frac{ص}{ص}} \\ \frac{\frac{ع}{ص} ع}{\frac{ص}{ص}} \end{array} \right.$$

في الدائرة الالتصاقية

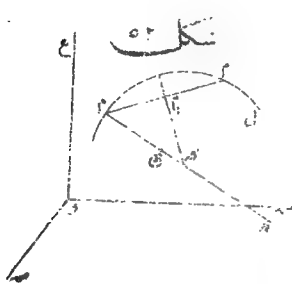
بالمثل إذا مكن منتصف الوتر م مستوعودى على هذا الوتر فإنه يقطع العمودى م و في نقطة و وهذه النقطة تكون مركزا

لدائرة مارة بالنقطتين م و م فإذا تقاربت نقطة م من نقطة م فإن المستوى يميل الى أن ينطبق على المستوى الالتصاقى م و ونهاية الدائرة تسمى الدائرة الالتصاقية للمنحنى في نقطة م

واعلم ان نصف قطر الدائرة الالتصاقية في نقطة م يساوى نصف قطر الانحناء في هذه النقطة

لان معادلة المستوى الممدود بالعماد على الوتر م م من منتصفه هي

$$ف س (س-س-س-س) + ف ص (ص-ص-ص-ص) + ف ع (ع-ع-ع-ع) = 0$$



(٢٥١)

أو (س-ص) فر + (ص-صه) فصه

$$+ \frac{1}{r} (ع - ع') = ع (ع - ع') + ف (ع - ع')$$

ويحذف س-س و ص-ص و ع-ع من هذه المعادلة وتوهم ادلات العمودى (١) يحدث

$$\left(ع - ع' \right) = \frac{ع}{r} + \frac{ف}{r} + \frac{ص}{r} + \frac{صه}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{ف}{r} + \frac{ص}{r} + \frac{صه}{r}$$

لكن اذا اعتبرت المتغيرات س و ص و ع دوال للمتغير يكون

$$س = ف + \frac{ص}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{صه}{r}$$

$$ص = ف + \frac{ص}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{صه}{r}$$

$$ع = ف + \frac{ص}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{صه}{r}$$

وحروف ل و ع و ط كيات تنعدم حينما يندم ف

وبوضع هذه المقادير فى المعادلة المتقدمة وحذف الحدود التى تشمل على ف وهى حدود مجموعها معدوم يحدث

$$\left[\dots + \frac{ص}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{صه}{r} \right] = \frac{ف}{r} + \frac{ص}{r} + \frac{ع}{r} + \frac{صه}{r}$$

وعند النهاية يكون

$$\text{نح} \times \frac{1}{\text{نح}} \times \text{نح} = 1 \quad \text{أو} \quad \text{نح} = \text{نح}$$

أعني أن نصف قطر الدائرة الالتصاقية في نقطة م يساوي نصف قطر الانحناء في هذه النقطة ولذا يقال للنقطة لـ التي هي نهاية نقطة ن مركز الانحناء أو مركز الدائرة الالتصاقية

بـ^{٢٣٧} وبمثل ما تقدم يثبت أن نقطة تقابل العمودى الاصلى م مع المستوى العمودى المار بنقطة م تكون نهايتها نقطة لـ أي مركز الانحناء لان معادلة هذا المستوى العمودى هي

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\text{كس}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \right) (\text{هـ} - \text{س} - \text{ف} - \text{هـ}) \\ & + \left(\frac{\text{كاص}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \right) (\text{صه} - \text{ف} - \text{صه}) \\ & + \left(\frac{\text{كع}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \right) (\text{ع} - \text{ع} - \text{ع} - \text{ع}) = 0 \end{aligned}$$

وبتعبير س - هـ و هـ - س و صه - ف و ع - ع بمقاديرها المستخرجة من المعادلات

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \text{س} - \text{هـ} &= \text{نح} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \quad \text{و} \quad \text{هـ} - \text{س} = \text{نح} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \\ \text{ع} - \text{ع} &= \text{نح} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \end{aligned} \right.$$

التي هي معادلات العمودى الاصلى يحدث

$$\begin{aligned} & \left[\text{نح} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \left(\frac{\text{كس}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \right) + \text{نح} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \left(\frac{\text{كاص}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \right) + \text{نح} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \left(\frac{\text{كع}}{\text{ك}} + \text{ف} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \right) \right] \\ & = \text{نح} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} + \text{نح} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} + \text{نح} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} + \text{نح} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \text{ف} + \text{نح} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \text{ف} + \text{نح} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \text{ف} + \text{نح} \frac{\text{كس}}{\text{ك}} \text{ف}^2 + \text{نح} \frac{\text{كاص}}{\text{ك}} \text{ف}^2 + \text{نح} \frac{\text{كع}}{\text{ك}} \text{ف}^2 \end{aligned}$$

وهذه المعادلة تختصر كثيرا بواسطة المعطيات الآتية وهي

إذا لوحظ أن

$$= \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}$$

فإنها تولد بعد القسمة على ف ر الى

$$\text{ع شخ} \left(\frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} + \frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} + \frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} \right)$$

$$= \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}$$

$$+ \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} + \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \cdot \frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}$$

ولولوحظ أن

$$\frac{1}{\text{ع شخ}} = \left(\frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} \right) + \left(\frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} \right) + \left(\frac{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}}{\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}}} \right)$$

تكون نهاية الطرف الاول هي $\frac{1}{\text{ع شخ}}$ نها ح

ونهاية الطرف الثاني هي

$$1 \text{ أي } \left(\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \right) + \left(\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \right) + \left(\frac{\text{كاس}}{\text{كاس}} \right)$$

واذن يكون

$$\frac{1}{\text{ع شخ}} = 1 \text{ أو نها ح} = \text{ع شخ}$$

وهذا ما أردنا اثباته

ب ٢٢٨. بموجب ما تقرره يمكن اعتبار مركز الانحناء في نقطة م ه ونقطة تقاطع المستوى

الاتصافي في نقطة م بمستويين أصليين أحدهما ممود من نقطة م والاخر من نقطة

قريبة جدًا منها

ولاجل تحصيل الاحتمالات ل و لا لمركز الانحناء لا يمكن تعويض م و م و م و م

في معادلات العمودي بالكميات ل و لا و لا فبالاحظة ان ح يؤول انذاك الى شخ يحدث

$$ل - م = ن = \frac{ل م}{ل م} \text{ فغ } , \quad ل - م = ن = \frac{ل م}{ل م} \text{ فغ } ,$$

$$ل - ع = ح = \frac{ل ع}{ل ع} \text{ فغ}$$

وهذه المعادلات تعين ل و ل و ل بدلالة احداثيات نقطة م

في زاوية الالتواء وفي نصف قطر الانحناء الثاني

بـ^{٢٢٩} لتكن أ و ب و ج جيوب تمام الزوايا التي يكونها العمود على المستوى الالتصاق في نقطة م مع المحاور الاحداثية ولتكن و الزاوية الواقعة بين هذا المستوى والمستوى الالتصاق المجاور له فكافي (بـ^{٢٢٣}) يحدث

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

وعند النهاية والرمز بحرف ت لما تؤول اليه زاوية و أعني الزاوية الواقعة بين مستويين التصاقين قريبين جدا من بعضهما يحدث

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

أو

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

و و و و و زوايا ميل العمود على المستوى الالتصاق للمنهني في نقطة م مع المحاور و و و و و وغير ذلك فان

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

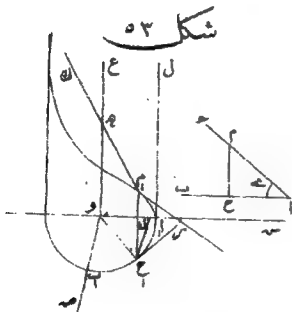
$$\frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} - \frac{ل}{ل} \text{ ف ح}$$

بأنه الزاوية الصغيرة جدا الواقعة بين مستويين التصاقين متالين تسمى زاوية الالتواء وتسمى الانحناء ثانياً والالتواء نسبة $\frac{\epsilon}{\kappa}$ الى κ وإذا اعتبر κ ثابتاً يكون هذا الانحناء مناسباً للزاوية ϵ

وتبين النسبة $\frac{\epsilon}{\kappa}$ كفاي الانحناء الاول بالكسر $\frac{1}{\kappa}$ بحيث يكون $\frac{\epsilon}{\kappa} = \frac{\kappa}{\epsilon}$ وتسمى الكمية $\frac{\epsilon}{\kappa}$ نصف قطر الانحناء الثاني أو نصف قطر الالتواء

في تعريف المنحنى البرمبي وفي معادلاته

بأنه متى لف مستوى زاوية مثل ϵ أو $\epsilon = \epsilon$ على اسطوانة قائمة و ϵ ل قاعدتها دائرة بحيث ينطبق الضلع AB على المحيط AB بالضبط فإن المنحنى الذي يلتف على حسب الضلع AC يسمى منحنياً برمبياً



بأنه لجعل المستقيم AM نقطة والتي هي مبدأ المنحنى البرمبي محاور السينات ونجعل العمود المقام على AM في مستوى القاعدة من المركز محاور الصادات ثم نجعل محورا الاسطوانة محورا العينات فيكون

$$r = \rho \cos \theta, \quad s = \rho \sin \theta, \quad \text{و} \quad \epsilon = \rho \cos \theta \quad (1)$$

لان

$$\epsilon = \rho \cos \theta = \rho \cos \theta = \rho \cos \theta = \rho \cos \theta$$

وبحذف ρ من المعادلات (1) توجد معادلتا المنحنى البرمبي وهما

$$r = \rho \cos \theta, \quad s = \rho \sin \theta, \quad \text{و} \quad \epsilon = \rho \cos \theta$$

الان الاصوب استعمال المعادلات (1) مع التغير المساعد ρ

(٢٥٦)

في المماس للمخني العربي

بشأن جيوب تمام زوايا ميل المماس م، في نقطة م (س و ص و ع) على المحاور هي

$$\frac{كس}{كص} , \frac{كص}{كح} , \frac{عك}{كح} \text{ لكن}$$

$$كس = - س حان كح , \text{ و } كص = س حان كح , \text{ و}$$

$$عك = م س كح , \text{ و } كص = ص م + ١ كح$$

واذن يكون

$$\frac{كس}{كص} = \frac{س حان}{ص م + ١ كح} , \text{ و } \frac{عك}{كح} = \frac{م س حان}{ص م + ١ كح}$$

$$\frac{٢}{ص م + ١ كح} = \frac{عك}{كص}$$

ومن القانون $\frac{عك}{كص} = \frac{٢}{ص م + ١ كح} = حان$ يتضح ان المماس م، يكون مع الرواسم

زاوية ثابتة تساوي متممة الزاوية ϵ وبناء عليه تكون زاوية مميله على مستوى قاعدة الاسطوانة ثابتة أيضاً مساوية للزاوية ϵ

وبالتأمل يرى ان $\frac{كص}{كح} = - \frac{حان}{كح} = - \frac{١}{طان}$ و $\frac{كص}{كح}$ المعامل الزاوي

للمستقيم ح، و طان المعامل الزاوي للمستقيم و ح فاذاً يكون هذان المستقيمان متعامدين على بعضهما وعليه يكون مسقط المماس على المستوى س ص مماساً في نقطة ح لقاعدة الاسطوانة

في نصف قطر الانحناء ومركزه

بشأن نصف قطر الانحناء في نقطة م معلوم بالقانون

$$\frac{1}{\left(\frac{\frac{عك}{كح}}{\frac{كص}{كح}} \right) + \left(\frac{\frac{كص}{كح}}{\frac{كص}{كح}} \right) + \left(\frac{\frac{كس}{كح}}{\frac{كص}{كح}} \right)} = \text{نصف}$$

لكن من القوانين التي وجدت في البند المتقدم يستتبع

$$= \frac{\frac{6}{6}}{\frac{6}{6}}, \frac{\frac{\text{حان}}{(\frac{6}{6})}}{\frac{6}{6}} = \frac{\frac{6}{6}}{\frac{6}{6}}, \frac{\frac{\text{حان}}{(\frac{6}{6})}}{\frac{6}{6}} = \frac{\frac{6}{6}}{\frac{6}{6}}.$$

واژن مکون

$$(r+1)u = \frac{1}{\frac{r^2 + r}{(r+1)u}} = \text{مخ}$$

ومن هنا يعلم ان نصف قطر الانحناء مقداره ثابت في جميع نقاط المحنى البرعي

بسم الله العودى الاصلى للمخنى البرمى فى نقطة م يكون مع المحاور زوايا جيب تمامها مناسبة للتفاضلات $\frac{6}{\sqrt{6}}$ و $\frac{6}{\sqrt{6}}$ و $\frac{6}{\sqrt{6}}$ أولى حان و حان و صفر

ومن هنا يعلم ان هذا المستقيم مواز للمستقيم OC واذن يكون نصف قطر الانحناء متجهها في اتجاه نصف قطر الاسطوانة والمستقيم OC العمود على المحور والماس m ، يعينان المستوى الالتصاقى ولواخذ $\omega = \frac{v}{r}$ لكات نقطة K من كز انحناء المنحنى البرمى في نقطة m

وحيث كان مقدار نصف قطر الانحناء ثابتاً وأكبر دائماً من نصف قطر الاسطوانة فينتج من ذلك ان مسار مركز انحناء المحنى البريى نحن برىى آخر خطوته كخطوة الأول الا انه في جهة عكسة

بأنه متى تحركت نقطة m على المنحنى البرمي برسم المستقيم m سطحاً مخروطياً يسمى سطحاً برمياً تماماً ويكون المستوى π مماساً لهذا السطح في نقطة m حيث أنه يمر بالراسم المستقيم m وبالمماس m للمنحنى البرمي الموضوع على هذا السطح ولاجل تحصيل معادلة هذا السطح يكفي حذف n من المعادلتين

ع = م ق و ، ح = م ط ل

الدالين على المستقيم م ٥ وبذلك توجد هذه المعادلة

$$\frac{ع}{م} = م$$

(٢٥٨)

في المستوى الالتصاقى وفي زاوية الالتواء نصف قطره

بـ ٢٤٧ نعلم أن

$$\begin{aligned} \text{كـ} &= \text{سـ حـ كـ} \text{ و } \text{كـ صـ} = \text{سـ حـ كـ} \text{ و } \text{كـ عـ} = \text{مـ سـ كـ} \text{ و} \\ \text{كـ} &= \text{سـ حـ كـ} \text{ و } \text{كـ صـ} = \text{سـ حـ كـ} \text{ و } \text{كـ عـ} = \end{aligned}$$

واذن يكون

$$\begin{aligned} \text{كـ} &= \text{كـ صـ} - \text{كـ صـ كـ} = \text{سـ حـ كـ} \text{ و} \\ \text{كـ} &= \text{كـ صـ} - \text{كـ صـ كـ} = \text{سـ حـ كـ} \text{ و} \\ \text{كـ} &= \text{كـ صـ} - \text{كـ صـ كـ} = \text{سـ حـ كـ} \end{aligned}$$

وحينئذ تكون معادلة المستوى الالتصاقى هي

$$\text{م ح ك} - (\text{سـ} - \text{صـ}) - \text{م ح ك} (\text{صـ} - \text{عـ}) + \text{عـ} - \text{عـ} = ٠$$

وذلك بالقسمة على العامل المشترك سـ حـ كـ

بـ ٢٤٨ اذا فرض بحرف ت زاوية الالتواء يعلم أن

$$٧ = \text{ت} (\text{كـ حـ عـ}) + (\text{كـ حـ عـ}) + (\text{كـ حـ عـ})$$

و سـ و سـ و سـ الزوايا التى يكونها العمود المقام من نقطة م على المستوى الالتصاق مع المحاور وحيث ان

$$\text{حـ تـ} = \frac{١}{\text{م} + ١} \text{ و } \text{حـ تـ} = \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١} \text{ و } \text{حـ تـ} = \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}$$

فيكون

$$\text{كـ حـ تـ} = ٠ \text{ و } \text{كـ حـ تـ} = \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١} \text{ و } \text{كـ حـ تـ} = \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}$$

$$\text{واذن يكون } \text{ت} = \frac{\frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١} + \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}}{\frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}}$$

$$\text{ويكون } \frac{\frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}}{\frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}} = \text{سـ} \text{ و } \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١} = \frac{\text{ت}}{\text{سـ}} \cdot \frac{\text{م ح ك}}{\text{م} + ١}$$

وبناء على هذا يكون الانحناء الثانى ثابتا كالأول

الفصل التاسع

في النقط المتمازة للمنحنيات المستوية

تعريف النقط المتمازة للمنحنيات المستوية وفي نقط الانقلاب

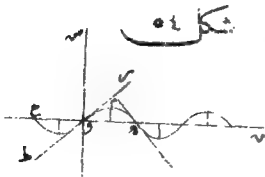
٢٤٩. النقط المتمازة لمنحنى هي نقط لها امتياز مخصوص بها لا يتعلق بوضع المنحنى بالنسبة لمحورى الاحداثيات ولا تكلم الاعلى النقط المتمازة للمنحنيات المستوية وحيث اتاقت كلمتنا في (١٥٨د) على نقط الانقلاب فنورد الآن بعض امثله لها فنقول

٢٥٠. لنفرض المنحنى الجيبى الذى معادلته

$$ص = حاسر$$

فحينئذ يكون $ص = ٠$ وعلى العموم حينئذ يكون $ص = \pm م$ (م عدد صحيح) يكون $ص = ٠$ وبناء على ذلك يقابل المنحنى محور السينات في نقط لانهاية العدد تحصل بأخذ أطوال مساوية لطول نصف المحيط على هذا المحور بالابتداء من نقطة الاصل في كل من الجهتين ويركب المنحنى من اجزاء متطابقة لانهاية لعدد ها غير انها توجد بالتعاقب فوق محور السينات وتحتة والرأسيات الكبرى والصغرى المساوية في المقدار المطلق للوحدة تطابق الافقيات $\frac{ط}{٢}$ و $\frac{٣ط}{٢}$ و $\frac{٥ط}{٢}$ و ومن معادلة المنحنى يستخرج

$$\frac{٦ص}{٦س} = حاسر \text{ و } \frac{٦ص}{٢س} = - حاسر$$



والمشتقة برتبة ثانية تنعدم وتتغير

اشارتها بالمقدار $ص = \pm م$

وبناء عليه تكون النقط و و التى

تقابل في المنحنى بمحور السينات

نقط انقلاب وحيث انه بالمقدار

$ص = \pm م$ تكون المشتقة برتبة

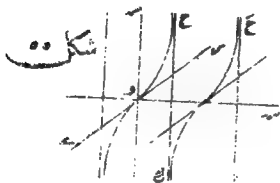
أولى مساوية للمقدار ± ١ فيكون

المماس في هذه النقط مماسا على الدوام

بقدر $\frac{١}{٢}$ أو بقدر $\frac{١}{٢}$ على محور

السينات

صه = ظاسه

فحينما يكون صه = ٠ وعلى العموم حينما يكون صه = \pm م ط يكون صه = ٠ . وحينئذ

يتقابل المنحنى مع محور السينات في نقطة

الاصل ونقط أخرى لانهاية لعدد هامتساوية

الابعاد عن بعضها وحينما يكون صه = $\frac{\text{ط}}{\text{ر}}$ يكون صه = ∞ واذا أخذ صه أقلقليلا من $\frac{\text{ط}}{\text{ر}}$ يكون ظاسه كبيرا جداوموجبا واذا كان الاقنى أكبر قليلا من $\frac{\text{ط}}{\text{ر}}$

يكون ظاسه كبيرا جدا غير انه يكون سالبا

وحينئذ يكون المستقيم الذي معادلته صه = $\frac{\text{ط}}{\text{ر}}$ تقريبا للمنحنى وغير ذلك يشاهد ان المنحنى

يمتد الى ما لا نهاية في جهتي محور الصادات ويتركب من فروع متطابقة لانهاية لعدد ه

وبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{\text{صه}}{\text{ط}} = \frac{1}{\frac{\text{ط}}{\text{صه}}} \text{ و } \frac{\text{صه}}{\text{ط}} = \frac{\text{صه}}{\text{ط}} = \frac{\text{صه}}{\text{ط}} = \frac{\text{صه}}{\text{ط}}$$

واذا وضع $\frac{\text{صه}}{\text{ط}} = ٠$ يوجد ان جميع نقط تلاقى المنحنى مع محور السينات نقط انقلاب

في النقط المضاعفة

بسطد النقطة المضاعفة هي نقطة يمر بها جله فروع المنحنى واحد والخاصية المميزة للنقطة

المضاعفة هي أن المنحنى يكون له فيها جله مماسات ولنضرب صفحا عن الحالة التي تول فيها

هذه المماسات الى مماس واحد فقط وهال مثال فيه صه دالة لمحاولة للمتغير صه فلتكن

$$\text{صه} = \frac{\text{ع}}{\text{د}} \pm (\text{صه} - \text{صه}) (\text{صه} - \text{صه})$$

والكسر $\frac{\text{ع}}{\text{د}}$ غير قابل للاختصار ومقامه د زوجي فالحد $(\text{صه} - \text{صه}) (\text{صه} - \text{صه})$ له مقداران حقيقيان ومختلفان في الاشارة بكل مقدار من مقادير صه الموافقة وهذا ما يناهبوضع \pm امام هذا الحد

في آن واحد ومن هنا يعلم أنه لأجل تحصيل النقط المضاعفة يلزم أن يتبدأ بالبحث عن النقط التي احداثياتها تحقق المعادلات (١) و (٢)

وحيث ان المعادلة (٢) تولد انذاره الى ∞ فلا يمكن أن تعين مقدار $\frac{y}{x}$ ويلزم استعمال هذه المعادلة التفاضلية وهي

$$= \frac{y^2}{x^2} + 2 \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{y}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

وبملاحظة أن $\frac{dy}{dx} = 0$ تولد هذه المعادلة الى

$$(4) \quad = \frac{y^2}{x^2} + 2 \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{y}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

ولنفرض أن الثلاثة معاملات $\frac{y^2}{x^2}$ و $\frac{y}{x} \frac{dy}{dx}$ و $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2$ لا تكون كلها معدومة وان المعادلة (٤) تعطي مقدارين حقيقيين ومميزين للمشتقة $\frac{dy}{dx}$ فهذا الفرض يعلم أنه يوجد مماسان في النقطة المعبرة وبناء على ذلك يمر منها فرعان للمنحنى وحيث تكون نقطة مزدوجة

لكن اذا تقابلت ثلاثه فروع للمنحنى في هذه النقطة فمن الواجب أن يكون لها فيها ثلاثة مماسات ولكون ان المعادلة (٤) التي ليست الا بدرجة ثانية بالنسبة للمشتقة $\frac{dy}{dx}$ لا يمكن ان تعطي ثلاثة مقادير لهذه الكمية فيلزم في آن واحد ان يكون

$$\frac{y^2}{x^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{و} \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

وتحصل مقادير $\frac{y}{x}$ بأخذ تفاضل المعادلة (٤) وهما هي كيفية العمل حينما تمر جهة فروع بالنقطة (س و صه)

بمعادلاته ولنمثل بالمنحنى الذي معادلاته

$$y^2 = x^2(x-1) \quad \text{أو} \quad y^2 = x^2(x+1)$$

فهذا المحنى متمثل بالنسبة لمحور السينات ومحور الصادات ويقطع الاول فى نقطة الاصل وفى

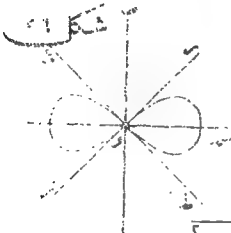
نقطتين آفقيهما $س = ١$ و $س = -١$

وبأخذ تفاضل معادلة المحنى يوجد

$$\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١} + = \frac{س^٢}{س^٢ - ١} + \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١} + = \frac{س^٢}{س^٢ - ١}$$

وحينما يكون $س = ٠$. يؤلمقدارا $ص$ الى مقدار واحد وهو صفر وغير ذلك فإنه فى هذه النقطة يكون

$$\frac{ص}{س} = ١$$



واذن تكون نقطة الاصل نقطة مزدوجة

وفى هذه النقطة يكون المماس $س = ٠$ و $ط = ٠$

فاسمين لزاويتى المحورين الى قسمين متساويين

ويوجد أن المشتقة برتبة ثانية هى

$$\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١} + = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١} + = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ١}$$

وحينما يكون $س = ٠$. يكون $\frac{ص}{س} = ٠$. واذن تكون نقطة الاصل نقطة مزدوجة

ونقطة انقلاب فى آن واحد

فى نقط الرجوع

بسم نقطة الرجوع هى نقطة ينتهى بها فرع منحنى وفيها يكون لهما مماس مشترك ويلزم

فى هذه الحالة ان يصير مقداران حقيقيان المتغير $ص$ متى كان $س$ أكبر أو أصغر من آفى

النقطة تخيلين متى كان $س$ أصغراً أو أكبر من هذا الآفى وان يصير مقداران للمشتقة $\frac{ص}{س}$

متساويين

ويقال الرجوع من النوع الاول ومن النوع الثانى بحسب ما يكون الفرعان فى جهتين مختلفتين

من المماس كما فى (شكل ٥٨) أو فى جهة واحدة من المماس المشترك لهما كما فى (شكل ٥٧)

وعوجب ما شاهدناه في تحديد المنحنيات المستوية (٢٥٧) يعلم نوع الرجوع بإشارة $\frac{٢٦}{٦٨}$

على الفرعين بالقرب من النقطة المعبرة

بـ ٢٥٦ فليكن المنحنى

$$صه = د (س) \pm (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) \quad (٢٥٦)$$

و د (س) و د (س) دالتان حقيقتان محدودتان بمقادير سه القريبة من ح ولنفرض ان الكسر $\frac{ع}{ك}$ موجب وغير قابل للاختصار وان مقامه زوجي فبكل مقدار للمتغير سه

أكبر من ح يكون للعد (س - ح) $\frac{ع}{ك}$ د (س) مقداران حقيقيان متساويان ومختلفان في الاشارة وهو ما يناه بوضع \pm امام هذا الحد

ومقدارا صه الحقيقيان والغير متساويين بكل مقدار للمتغير سه أكبر من ح بصيران متساويين حينما يكون سه = ح وتخليين حينما يكون سه > ح واذن يجتمع فرع المنحنى ويقفان في النقطة التي احداها سه = ح و سه = د (س)

ويارم علينا الآن ان نعرف هل للفرعين في هذه النقطة مماس مشترك أم لا فن معادله المنحنى يستخرج

$$\frac{صه}{ك} = د (س) \pm (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) \pm (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) \quad (٢٥٧)$$

فإذا كان $\frac{ع}{ك} < ١$ فانه بطابق للمقدار سه = ح المقدار الواحد د (س) للمشتقة وحيث كان للفرعين مماس مشترك في النقطة المعبرة فتكون هذه الاخيرة نقطة رجوع ولاجل معرفة ان كانت نقطة الرجوع من النوع الاول أو من النوع الثاني يحسب $\frac{صه}{ك}$

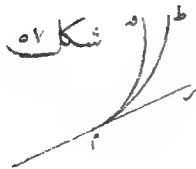
فيوجد أن

$$\frac{صه}{ك} = د (س) \pm (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) (١ - \frac{ع}{ك}) (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) \quad (٢٥٨)$$

$$\pm (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) (١ - \frac{ع}{ك}) (س - ح) \frac{ع}{ك} (س) \quad (٢٥٩)$$

(٢٦٥)

ونفرض هنا فرضين الاول اذا كان $\frac{c}{1} - \frac{c}{2} < 0$. فانه بالمقدار $s = 0$ تكون
 $\frac{c}{6s^2} = s' (0)$ وحيث اذا لم يكن $s' (0)$



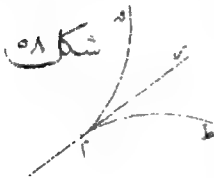
معدوماً تكون $\frac{c}{6s^2}$ لها اشارة واحدة على
 الفرعين وبناء عليه يكون للمنحنى رجوع
 من النوع الثاني كما في شكل ٥٧

الثاني اذا كان $\frac{c}{1} - \frac{c}{2} > 0$. فانه بكل
 مقدار للمتغير s اكبر من 0 قليلاً يكون الحد

$$(1) \quad \frac{c}{1} (1 - \frac{c}{2}) (s - \frac{c}{2})^{\frac{c}{2} - 1} (s)$$

كبير اجدا باعتبار المقدار المطلق ولا يحصل ذلك الحدود الا من $\frac{c}{6s^2}$ فانها تقرب كلها

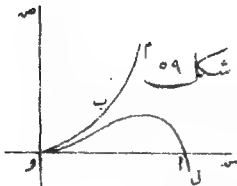
ماعدا $s' (0)$ من الصفر متى مال s
 الى 0 وحيث تكون اشارة $\frac{c}{6s^2}$



كاشارة الحد (١) وحيث كان لهذا الحد
 اشارة مزدوجة فيعلم من ذلك انه في النقطة
 $[s = 0 \text{ و } s' = 0]$ يكون

الفرعان موجودين احدهما في جهتين
 المماس المشترك وآخرهما في الجهة الاخرى

وفي هذه الحالة يكون الرجوع من النوع الاول كما يشاهد في (شكل ٥٨)
 بـ ٥٧ ولنفرض المنحنى



$s'' = s' + \frac{c}{6s^2}$
 فبكل مقدار موجب للمتغير s يوجد
 مقداران حقيقيان للرأسي s'' بصيران
 متساويين حينما يكون $s = 0$ وليس
 للمنحنى تقطعية الاقنيات السالبة وأما في

(٣٤) تفاضل - اول

جهة السينات الموجبة فان لفرعين يتمدان الى ما لا نهاية احدهما جهة الصادات الموجبة
 و آخرهما جهة الصادات السالبة قاطع المحور السينات في النقطة التي افقيها يساوى ١
 ونهاية النسبة $\frac{ص}{س}$ صفر حينما يكون $س = ٠$. ومتى كان للمتغير $س$ مقدار موجب
 صغير جدا يكون مقدارا $ص$ المطابقا للموجبين كذلك . وحينئذ يكون للفرعين مماس
 مشترك في نقطة . ويكونان موجودين بالقرب من هذه النقطة في جهة واحدة من هذا المماس
 واذن تكون نقطة الاصل نقطة رجوع عن النوع الثاني

ويعمل أيضا على هذه النتيجة بواسطة مقدارى $\frac{ص}{س}$ و $\frac{ص}{س}$ وهما

$$\frac{ص}{س} = ٢ - \frac{٥}{٢} + \frac{٢}{س}$$

$$\frac{ص}{س} = ٢ - \frac{١٥}{٢} + \frac{١}{س}$$

فحينما يكون $س = ٠$. يكون $\frac{ص}{س} = ٢$. ويكون $\frac{ص}{س} < ٢$. وحينئذ تكون

نقطة و نقطة رجوع عن النوع الثاني

في النقطة المنفردة

بمعنى النقطة المنفردة هي نقطة احداها يحققان معادلة التخي بدون أن يبرهما فرع من
 فروعهما فتكن المعادلة

$$ص = \pm (س - ٢) (س - ٢)$$

ولنفرض في أول الامر أن $س > ٢$ فحينما يكون $س = ٢$ يكون $ص = ٠$. وبذا توجد

نقطة ب على محور السينات واذنا تزيد

من $س$ الى $+$ يتزايد $ص$ من

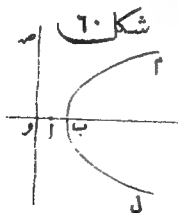
الى $+$ ويصل فرع مثل هذا

واذا جعل $س > ٢$ يصير الرأس تقريبا

الامتى كان $س = ٢$ لانه بمقدار $س$ هذا

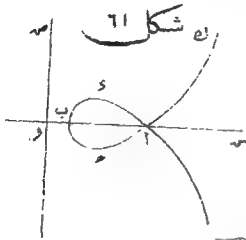
يكون $ص = ٠$. واذن تكون نقطة

١ (س = ٢ و ص = ٠) نقطة منفردة



(٢٦٧)

وإذا كان $\epsilon < \delta$ فإن المنحنى لا يكون له نقطة منفردة لأن مقدارا ϵ يكونان حقيقيين



متى كان δ من محصورين δ و ϵ وحيثما يكون $\delta = \epsilon$ يؤل مقدارا ϵ الى ∞ ومن $\delta = \epsilon$ الى ∞ يتزايد ϵ الى ما لا نهاية وفي هذه الحالة يمر القصرعان δ و ϵ و δ و ϵ بنقطة ١ وحيثما تكون هذه النقطة نقطة مزدوجة

في نقطة الوقوف

بـ ٥٩ نقطة الوقوف هي نقطة يقف فيها فرع من منحنى دفعة واحدة فلنعتبر المنحنى الذي معادلته

$$\frac{1}{\delta} = \epsilon$$

فحيثما يكون $\delta = \infty$ يكون $\epsilon = \infty$ وإذا زيد δ الى ∞ يتناقص ϵ

من ∞ الى ١ وبذا يحدث فرع

تقري لمحور انصادات والمستقيم الذي معادلته

$$\delta = 1$$

وإذا اعتبرت الآن مقادير سالبة للمتغير δ

$$\frac{1}{\delta} = \epsilon$$

وحيثما يكون $\delta = \infty$ يكون $\epsilon = \infty$

وإذا غير المنحنى بنقطة الاصل ثم أخذ الرأس

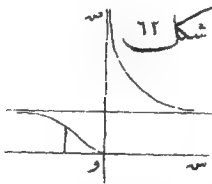
في الزيادة كلما زاد المقدار المطلق للمتغير δ الى المقدار $\delta = 1$ وبذلك يوجد فرع آخر تقري

للمستقيم الذي معادلته $\delta = 1$ ويقف دفعة واحدة في نقطة الاصل آتيا من السينات

السالبة وإذا تكون نقطة الاصل فقط وقوف

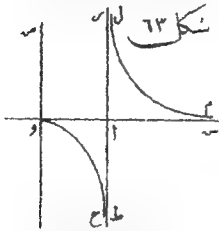
يشكك ولنفرض المنحنى

$$\frac{1}{\delta} = \epsilon$$



(٣٦٨)

فهنا لا يمكن اعطاه سر مقادير سالبة لان لوسر يصير تخيلا واذا اعطى للمتغير سر مقادير موجبة كبيرة جدا يصير الرأسى صغيرا جدا وسالبا وبأختمه مداره المطلق فى الزيادة كل زاد سر



الى ان يكون سر = ١ ويؤلى الى x حينما يكون سر = ١ واذن يوجد فرع من المنحنى يندئى من نقطة الاصل ويكون تقريبا جهة الصادات السالبة للمستقيم الذى معادلته سر = ١ واذا زاد سر بالاستدامن الى x يصير سر موجبا ويناقص هذا الرأسى الذى يكون فى أول الامر كبيرا جدا الى أن يؤلى الى الصفر وبذلك يوجد الفرع لم وفى هذا المثال نقطة الاصل نقطة وقوف

فى النقطة البارزة أو الزاوية

بالتد لافرض المنحنى

$$\frac{س}{ل} = ص$$

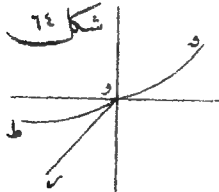
$$\frac{١}{س} + ١$$

حينما يكون سر = ص. يكون نقطة الاصل نقطة من نقط المنحنى فاذا جعلنا سر = ص. فى المقدار $\frac{١}{س} = \frac{١}{ص}$ تكون نها $\frac{١}{س} = \frac{١}{ص}$ ومن ذلك يعلم ان

الفرع وق مماس فى نقطة و للصور و

وغير ذلك اذا جعل سر = ع يكون $\frac{١}{س} = \frac{١}{ع}$ وحينما يكون سر = ع =

يكون



نها $\frac{١}{س} = ١$

وحينئذ يكون المماس فى نقطة و للفرع وط الموجود جهة السينات السالبة هو المستقيم و المتصغر زاوية المحورين

(٢٦٩)

ونقطة و التي تنتهي فيها فرعاً من كل منهما مماساً متميز في هذه النقطة تسمى نقطة زاوية
أو نقطة بارزة

بـ ٢٦٩ والجنح عن النقطة المتأخرة يستدعي الاختبار الجيد لصورة المنحنى بمجاورة النقطة التي
يقع بها المقدار الجبري للمشتقة $\frac{y}{x}$ في حالة من الأحوال التي ييناها في هذا الفصل لانه قد

يتأني أن يكون $\frac{y}{x}$ تخلياً على الدوام بالقرب من هذه النقطة وأن يكون $\frac{y}{x}$ حقيقياً
في النقطة المذكورة



يقول خادم تصحيح العلوم بدار الطباعة الزاهية القاهرة سيولان مصر القاهرة الفقير
الى الله تعالى محمد الحسيني اعانه الله على أداء واجبه الكفائي والعيني

أما بعد حمد الله على آلائه والصلاة والسلام على خير أنبيائه فقد تم طبع الجزء الأول من هذا
الكتاب البديع حسن الوضع والصنيع الآتي من حساب التفاضل والتكامل الذي هو من
أشرف الأعمال الحسابية بفقائه والجلالى لخطاب الحسان جميل عرائسه كتاب باله من كتاب
ياخذ بيد قارئه حتى يهديه سبيل الصواب جمع من رفائق هذا الفن أشقائهم وملائم من
مخدراته خدورها وأبياتها تأليف حضرة الصنع الماهر وغنية الجهد اللامع الباهر الذي حاز
من هذا الفن ثوابه ولبس من طراز حله البديعة سوابغه من عليه المعول في هذا الشأن في
المبدأ والمآل حضرة أجدافندى كمال ولما عرضت عرائسه على نقاد المعارف وعشاق
اللطائف رأوا أن تكثير أشخاصه بطبعه رغبة في عموم نفعه من أهم المهمات وأنجح
الرغبات فأمروا بذلك وشرع فيه بمطبعة المعارف ثم أحيل الكمال طبعه على مطبعة بولاق ذات
الحاسن الباهرة والتمار البائعة والظل الوارف فأكمل طبع الجزء الأول وهو حساب التفاضل
على هذا الشكل الجميل والهيكلي البهي الجليل ولبه ان شاء الله تعالى الجزء الثاني
وهو حساب التكامل على أحسن حال وأبهج منوال في ظل الحضرة
الفضيلة الحديوية وعهد الطلعة البهية المهية التوفيقية حضرة
من أفاض على رعيته غيث احسانه وعظم برائده عدله وهنى
امتنانه ولى نعمتنا على التحقيق أفندينا محمد باشا توفيق
آدام الله لنا أيامه ووالى علينا انعامه سنة خمس
بعد ثلثمائة وألف من هجرة من خلقه
الله على أكمل وصف عليه وعلى
آله وصحبه أفضل الصلاة
والسلام ما فاتح
مسك ختام

كتاب
حسابي التفاضل والتكامل

تأليف
حضرة احمد افندي كمال
مدرس فرع الجبريات بمدرسة المهندسخانه الخديويه

المجزء الثاني
في حساب التكامل

قد قرر مجلس المعارف الاعلى بجاسته المنعقدة في يوم الثلاث المبارك الموافق ٤ اكتوبر
سنة ١٨٨١ افرنكيه (١٠ ذى القعدة سنة ١٢٩٨ هجريه) لزوم طبع هذا الكتاب
واستعماله لتلاميذ مدرسة المهندسخانه الخديويه

(حقوق الطبع محفوظة للمؤلف)

(الطبعة الاولى)
بالطبعة الكبرى الاميرية بولاق مصر المحمديه



(بسم الله الرحمن الرحيم)

الباب الأول

في حساب تكامل الدوال

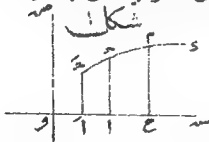
الفصل الأول

في الطرق المختلفة لحساب التكامل

بسم الله اذا علمت دالة ذات متغير واحد فانه يمكن دائماً اعتبارها مشتقة لدالة أخرى مجهولة والبحث عن هذه الدالة الأخرى التي تنافسها الدالة المعلومة مضروبة في تفاضل المتغير الغير متعلق ولكن y (دالة المعلومة) فأقول انه يوجد دائماً دالة تنافسها y (دالة) لانه اذا رسمنا المتغير x الذي معادلته

$$y = f(x)$$

بالنسبة لمحورين متعامدين على بعضهما فان مساحة هذا المنحنى المحصورة بين رأسي ثابت حيثما اتفق وليكن A والرأسي B المطابق للافقي المتغير x تكون دالة للمتغير x وحيث ان تفاضل هذه المساحة هو y x أي $y = f(x)$ فاذن تكون هذه المساحة دالة تنافسها y (دالة) وتكون y (دالة) مشتقة لها



بسم الله يطلق اسم تكامل y (دالة) ويستدل عليه بالرمز \int y (دالة) على الدالة التي تنافسها y (دالة) والعملية التي يتوصل بها من تفاضل دالة الى هذه الدالة تسمى عملية أخذ التكامل أو حسابها

وہوخذمن هذا التعريف ان عليتي أخذ التكامل وأخذ التفاضل علمتان متضادتان بحيث انه اذا وجدت العلمتان 6 و 7 يحوار بعضهما ببعض وبعضهما بعضا مثلا

$$, \quad \mu_6(s) = \mu_6(s) \cup \mu_6$$

$$(\mu)_1^s = (\mu)_1^{s66}$$

يستد يمكن أن يكون لتكامل تفاضل معلوم مثل δ (س) δ م مقادير لانهاية لعدد لها لانه
لوعلى دالة ولتكن δ (س) وكان تفاضلا δ (س) δ م فباضافة ثابت اختيارى لهذه
الدالة يكون المحصل وهو δ (س) + ث تفاضله التفاضل δ (س) δ م بعينه لكن
لا يكون هناك دوال أخرى اذن كل دالتين تفاضلاه متساويان لا يمكن ان تختلفا عن بعضهما
الا بكمية ثابتة

وبناء على هذا يكون التكامل العمومي للدالة التفاضلية z (س) 6 س هو

$$1 + (m)$$

وحرف ش رمز ثابت اختياري ومن الشكل يتضح اعتبار هذا الثابت الاختياري لانه لو جعل α رأسيًا بالبدل عن β توجد المساحة α أم β التي تزيد عن المساحة β أم α بالمساحة الناتجة α β

في حساب تكامل حاصل ضرب تفاضل في عامل ثابت

بشد كانه يمكن وضع عامل ثابت مثل γ خارج علامة التفاضل يمكن كذلك وضعه خارج علامة التكامل

لان

$$, \quad u_6 v = v_7 u$$

$$v_7 = v_6 \text{ 且 } v_7 = v_7 \text{ 且 } v_6$$

واحد ہوں

$$v6\bar{6}7 = v67\bar{6} \quad \text{و} \quad v6\bar{6}7 = v76\bar{6}$$

وبفرض $u = s(s)$ يكون

$$f \circ g = g \circ f$$

تكمالات يمكن تحصيلها مباشرة

بمسند تفاضل الدوال البسيطة وهي $\sqrt{1+x^2}$ و $\sqrt{1-x^2}$ الخ يوصل مباشرة الى تكاملات
نحصرها في هذا الجدول وهو

$\int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 dx = x + C$	$\int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx = \int 1 dx = x + C$
$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$	$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$	$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$
$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$	$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$	$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$
$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$	$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

وإذا كان $x > \frac{1}{2}$ يكون

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$$

ويكون للتكامل $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ مقداران يظهر أنهما مختلفان لكن حيثان

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

فيما هذان التكاملين لا يختلفان عن بعضهما الا بكمية ثابتة

بمسند وفي جميع هذه القوانين يمكن أن يكون x المتغير الغير متعلق أو دالة حيثما اتفق
للمتغير الغير متعلق مثلاً اذا عوض x في القانون

$$(١) \quad \frac{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}{1+\frac{1}{\sqrt{s}}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}$$

بدالة وتكن $\frac{1}{\sqrt{s}}$ يكون أيضا

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}{1+\frac{1}{\sqrt{s}}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}$$

بشد القانون (١) يكون ضالا اذا طبق على الحالة التي يكون فيها $1 = \frac{1}{\sqrt{s}}$ فانه يوصل
اذن الى

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

وماذا لا يسبب أن $\frac{1}{\sqrt{s}}$ يساوى الدالة العالية لوسه التي لا يمكن بيانها بمقدار جبرى
ومع ذلك فانه يتوصل بالتعويض الى استنتاج مقدار $\frac{1}{\sqrt{s}}$ من القانون (١) لانتا لو طرحنا
الكمية الثابتة $\frac{1}{\sqrt{s}}$ من الطرف الثانى (وبذلك لا يحتل تفاضله) يحدث

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}{1+\frac{1}{\sqrt{s}}} = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}$$

فاذا جعل $1 = \frac{1}{\sqrt{s}}$ يؤول الكسر $\frac{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}$ الى $\frac{1}{\sqrt{s}}$ ولجل تحصيل مقداره الحقيقى
بالطريقة المعروفة يلزم أخذ مشتقة حدى هذا الكسر بالنسبة للمتغير $\frac{1}{\sqrt{s}}$ وجعل $1 = \frac{1}{\sqrt{s}}$

فى خارج قيمة المشتقين أعنى فى $\frac{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}{1+\frac{1}{\sqrt{s}}}$ فيحدث لوسه واذن يكون

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

فى حساب تكامل حاصل جمع جبرى

بشد من القانون

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

يستخرج بأخذ تكامل الطرفين

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

أو

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

الثاني \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}

فيكتب

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

وبذلك نؤمل عملية أخذ تكامل $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ الى عملية أخذ تكامل $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ وبمثل هذا نؤمل هذه العملية الاخيرة الى عملية أخذ تكامل $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ وهم جربا بحيث اذا كان \mathbb{M} عددا صحيحا موجبا يتوصل أخيرا الى البحث عن $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ الذي هو $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ وبالأوضاع المتتالية يحصل التكامل المطلوب

فاذا جعل $\mathbb{M} = 2$ يحدث

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} + \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

الثالث - اذا طبقت القاعدة المتقدمة لحساب

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

يوجد

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} - \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} (1 - 1) + \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

في أخذ التكامل بالوضع

بشأنه أحيانا يمكن تحصيل تكامل الدالة التفاضلية $\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$ بتغيير المتغير الغير متعلق واذا قال يقال ان التكامل متحصل بطريقة الوضع

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} \text{ فيكون } \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} [\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}] \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

(أمثلة) - الاول

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

فيوضع

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} \text{ فيكون } \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

وانه يكون

$$\mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} = \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M} + \mathbb{M} \mathbb{K} \mathbb{M}$$

$$\text{أى } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} (حسبه + س) = \frac{1}{\frac{1}{2}} (حسبه + س) + \frac{1}{2}$$

الثاني - وعلى العموم اذا كان المطلوب حساب

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} (حسبه + س)$$

يوضع حسبه + س = ص فيكون $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ ويؤول الامر الى $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ و $\frac{1}{\frac{1}{2}}$

الثالث - اذا اريد حساب

$$\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

يوضع

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{ فيكون } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{ ويكون } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

وانه يكون

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

الرابع - هذه الطريقة توصل الى حساب التكامل الكثير الاستعمال وهو

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

متى كان العاملان ذوا الدرجة الاولى اللذان تتحلل اليهما اذات الثلاثة الحدود وهي

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ أعني متى كان } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 0 \text{ . ولذلك يلاحظ أن}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

واذا جعل

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ يكون } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

ويؤول التكامل المطلوب الى

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} \text{ قوس طاء } + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$$

وبتعويض ص بقدرها بدلالة ص يحدث

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \text{ قوس طاء } + \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$$

وهذا الناتج يمكن وضعه بصورة أخرى ولذلك نفرض ان $\sqrt{s-1}$ و $\sqrt{s+1}$ هما الجذران التخيليان للمعادلة

$$s^2 + s + 1 = 0$$

فيكون

$$\sqrt{s-1} = \frac{s}{\sqrt{s+1}}, \quad \sqrt{s+1} = \frac{s}{\sqrt{s-1}}$$

وانذن يمكن كتابة التكامل المبحوث عنه هكذا

$$I = \frac{1}{s} \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds + \text{ث}$$

الخامس - ليكن المطلوب حساب

$$I = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds$$

فيكتب

$$I = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds$$

ثم يجعل

$$\frac{s^2}{s^2 + s + 1} = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} \quad \text{فيكون } s = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} \quad \text{ويكون } s = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

وانذن يكون

$$I = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds$$

$$= \frac{1}{s} \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds + \text{ث}$$

$$I = \frac{1}{s} \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds + \text{ث} \quad \text{أى}$$

السادس - اذا كان المطلوب البحث عن

$$I = \int \frac{s^2}{s^2 + s + 1} ds$$

يجعل

$$s = \frac{s^2}{s^2 + s + 1} \quad \text{فيكون } s = \frac{s^2}{s^2 + s + 1}$$

(٢) تكامل - ثانى

ويكون

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2}{s} \quad \text{و يمثل ذلك يوجد ان}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s(1-s)} = \frac{2}{s} \quad \text{و}$$

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(1-s)} = \frac{2}{s(1-s)}$$

الفصل الثاني

في حساب تكامل الكسور الجذرية

بلد ليكن المطلوب حساب تكامل الكسر

$$\frac{s(s-1)}{(s-1)^2}$$

والدالتان $s(s-1)$ و $(s-1)^2$ دالتان جبريتان صحيحتان للمتغير s
 فاذا لم تكن درجة $s(s-1)$ أقل من درجة $(s-1)^2$ يمكن قسمة $s(s-1)$ على $(s-1)^2$ ويستمر
 في القسمة الى أن يتوصل الى باق $(s-1)$ بدرجة أصغر من درجة $(s-1)^2$ ولنفرض ان
 الخارج هو $(s-1)$ فيكون

$$\frac{s(s-1)}{(s-1)^2} = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2} + \frac{(s-1)}{(s-1)^2}$$

ويكون

$$\frac{s(s-1)}{(s-1)^2} = \frac{s(s-1)}{(s-1)^2} + \frac{(s-1)}{(s-1)^2}$$

وحيث قد علمت كيفية تحصيل $\frac{s(s-1)}{(s-1)^2}$ فتؤول المسئلة الى حساب تكامل الكسر الجذري

$$\text{وهو } \frac{s(s-1)}{(s-1)^2} \text{ الذي فيه } (s-1) \text{ بدرجة أقل من درجة } (s-1)^2$$

في الحالة التي لا يكون فيها المقام سوى جذور بسيطة

يتألف لنبحث حينئذ عن

$$\frac{f(s)}{g(s)}$$

ولذلك نفرض أن م درجة المعادلة

$$0 = f(s)$$

التي نفرض أن جذورها التي عددها م هي أ و ب و ج و ... و ل
ولنفرض أولاً أن هذه الجذور المقيمة العدد الحقيقية والتخيلية بسيطة ونبحث أن أمكن عن
الثابت أ و ب و ج و ... و ل المقيمة العدد التي تحقق المعادلة

$$(1) \quad \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{A}{s-A} + \frac{B}{s-B} + \dots + \frac{L}{s-L}$$

ولذا يكفي أن يكون

$$(2) \quad f(s) = A \frac{f(s)}{s-A} + B \frac{f(s)}{s-B} + \dots + L \frac{f(s)}{s-L}$$

وجميع الخواارج $\frac{f(s)}{s-A}$ و $\frac{f(s)}{s-B}$ الخ صحيحة وعددها الجاهيل أ و ب و ج و ... الخ

يساوي م وحينئذ يمكن إيجاد مقاديرها بمساواة معاملات القوى المتحدة للمتغير s ببعضها
في الطرفين إلا أنه يمكن استعمال طريقة أبسط من هذه وأفضل إذا ما علم أن هذه المقادير محدودة
ومعينة

ولذلك يجعل $s = A$ في المعادلة (2) فثبت كانت الجذور أ و ب و ج و ... الخ بسيطة

فتصير الخواارج $\frac{f(s)}{s-B}$ و $\frac{f(s)}{s-C}$ و ... و $\frac{f(s)}{s-L}$ معدومة وأما $\frac{f(s)}{s-A}$

فإنه يؤلى إلى $\frac{f(A)}{A-A}$ الآن مقدارها الحقيقي هو $f'(A)$ واذن يكون

$$f'(A) = \frac{f(s)}{s-A} \text{ ومن هنا يكون } \frac{f'(A)}{f(A)}$$

ومقدار أ هذا محدود لأنه حيث كان أ جذراً بسيطاً للمعادلة $f(s) = 0$ فلا تكون $f'(A)$ معدومة

وخلاف ذلك فان مقدار $\frac{1}{(س)^2}$ يكون مخالفا للصفر اذا فرض أن الكسر $\frac{1}{(س)^2}$ غير قابل للاختصار (وهذا ممكن دائما)

ويعلم من ذلك أن مقادير الثوابت التي تحقق معادلة (٢) هي

$$(٢) \quad \frac{1}{(١)^2} = 1, \quad \frac{1}{(٢)^2} = \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(ك)^2} = \frac{1}{ك^2}$$

يُقال ومنى أجرى التحليل المين بمعادلة (١) يكون

$$\dots + \frac{1}{س-١} + \frac{1}{س-٢} = \frac{1}{(س)^2}$$

واذن يكون

$$(٤) \quad \dots + \frac{1}{س-١} + \frac{1}{س-٢} = \frac{1}{(س)^2}$$

في الحالة التي يكون فيها بعض الجذور البسيطة تخيليا

بمثال اذا كان بعض جذور المعادلة $\frac{1}{(س)^2} = 0$ تخيليا كان التحليل (١) ممكنا أيضا غير أن الحد المطابق لجذر تخيلي في القانون (٤) يكون تخيليا واذا ذلك يكون الاوفق العمل بالكمية الاتية وهي

لتعتبر جذرين تخيليين مقترنين وليكونا

$$\sqrt{1-\gamma} + \gamma = 1, \quad \sqrt{1-\gamma} - \gamma = 1$$

فيكون

$$\sqrt{1-\gamma} + \gamma = \frac{(\sqrt{1-\gamma} + \gamma)^2}{(\sqrt{1-\gamma} + \gamma)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

وحرفا γ و $\sqrt{1-\gamma}$ التين حقيقتين وجذريتين للمقدارين $1-\gamma$ و γ وبغير $\sqrt{1-\gamma}$ الى $1-\gamma$ يحدث

$$\sqrt{1-\gamma} - \gamma = \frac{(\sqrt{1-\gamma} - \gamma)^2}{(\sqrt{1-\gamma} - \gamma)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

وحيث يكون

$$\frac{1-\sqrt{v}-v}{1-\sqrt{v}+l-v} + \frac{1-\sqrt{v}+v}{1-\sqrt{v}-l-v} = \frac{2}{v-v} + \frac{1}{1-v}$$

$$\frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} =$$

واذن يكون

$$\frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \left(\frac{2}{v-v} + \frac{1}{1-v} \right)$$

لكن

$$و \quad \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)}$$

$$\frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)}$$

وحيث يكون

$$\left(\frac{2}{v-v} + \frac{1}{1-v} \right)$$

$$= \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} - \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} + \frac{1}{1-v}$$

بمسألة - الأولى لكن الكسر

$$\frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)}$$

فيوضع

$$\frac{2}{v-v} + \frac{1}{1-v} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)}$$

وبتعبوض v على التوالي بالعدد 1 و 2 في المتطابقة

$$\frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)} = \frac{v^2-(l-v)v}{v^2+(l-v)}$$

$$\frac{37}{(2-3\sqrt{2})2} + \frac{2}{2} = \frac{7+3\sqrt{2}}{2+3\sqrt{2}}$$

واذن يكون

$$\frac{\frac{37}{2} + (2-3\sqrt{2})\frac{2}{2}}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = \frac{7+3\sqrt{2}}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{6\sqrt{2}}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{37}{2} + \frac{6\sqrt{2}(2-3\sqrt{2})}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{6\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$$

أو

$$\frac{6\sqrt{2}}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{37}{2} + (0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2})\frac{2}{2} = \frac{6\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$$

لكن

$$\frac{6\sqrt{2}}{\frac{31}{11} + 2(\frac{2}{2} - \sqrt{2})} \cdot \frac{37}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{37}{2}$$

وهذا التكامل الأخير يساوى بموجب (بـ) لهذا المقدار وهو

$$\frac{2}{31\sqrt{2}} \text{ قوس طا } \frac{2-3\sqrt{2}}{31\sqrt{2}}$$

وحينئذ يكون

$$(0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2})\frac{2}{2} = \frac{6\sqrt{2}(7+3\sqrt{2})}{0+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{37}{31\sqrt{2}} \text{ قوس طا } \frac{2-3\sqrt{2}}{31\sqrt{2}} +$$

الرابع - وعلى العموم اذا كان المقدار المطلوب تحصيل تكامله هو

$$\frac{6\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}$$

يوضع هكذا

$$\frac{6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}(2+\sqrt{2}) + \frac{6\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}(2-\sqrt{2})} \cdot \frac{2}{2}$$

وحيث ان

$$q = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} \text{ و } q = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r}$$

$$q = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{r(s-j)}}$$

فيكون

$$q = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r}$$

$$+ \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} + \dots$$

في الحالة التي تكون فيها الجذور مضاعفة

بالمقدار في الحالة التي يكون فيها المقام الكسر $\frac{r(s-j)}{r(s-j)+r}$ عوامل مضاعفة أعني اذا كان

$$r(s-j) = (s-j)^2 (s-j)^3 \dots (s-j)^n$$

لا يمكن ايجاد مقادير الثوابت a, b, c, \dots تحقق المتطابقة

$$\frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{a}{s-j} + \frac{b}{(s-j)^2} + \dots$$

لانه اذا حولت جميع حدود الطرف الثاني الى كسر واحد لا يكون مقام هذا الكسر مشتركاً على $s-j$ الا بدرجة أولى مع ان هذا العامل يدخل بدرجة n في $r(s-j)$ وقد فرض أن

الكسر $\frac{r(s-j)}{r(s-j)+r}$ لا يقبل الاختصار

ولاجل ايضاح كيفية التعليل في هذه الحالة نفرض أولاً أن

$$r(s-j) = (s-j)^2$$

ثم نعلم ان

$$q = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r} = \frac{r(s-j)}{r(s-j)+r}$$

واذن يكون

$$\dots + \frac{(1)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2 \times 1} + \frac{(1)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(1)^{(1-\frac{1}{2})}}{1-s} \frac{1}{(1-2) \dots 2 \times 1} +$$

وهذا التحليل لا يمتد زيادة عن ذلك لان (s) تكون في الغاية بدرجة $1-2$ حيث فرض أن

$(s) = (s-1)^2$ ويعلم من ذلك أنه يمكن تحليل $\frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(s)^{\frac{1}{2}}}$ الى كسور عددها 2 كل منها بسطه ثابت ومقامه قوة لذات الحدين $s-1$

وحينئذ ترجع المسئلة الى أخذ تكامل كسور بالصورة $\frac{ك}{(1-s)^هـ}$ وحيث انه يمكن كتابة هذا

التفاضل بالصورة $\frac{ك(1-s)^هـ}{(1-s)^هـ}$ فيشاهد ان تكامله هو $\frac{1}{(1-s)(1-هـ)}$ ان كان $هـ < 1$ و لو $(1-s)$ ان كان $هـ = 1$

بلائذ ولنبحث الآن عن اجراء تحليل مشابه للمقدمة في الحالة العمومية أعني متى كان

$(s) = (s-1)^2 (s-ب)^ج (s-ج)^ل \dots (s-ك)^م = (1-s)^2 (1-s)^ج \dots (1-s)^م$ ولذلك نفرض أن $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ معاملات تحقق المتطابقة

$$\frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} + \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}}$$

و (s) كمية كثيرة الحدود وجذرية وصحيحة بالنسبة للمتغير s فاذا ضربت هذه المعادلة في $(1-s)^{\frac{1}{2}}$ وحولت الحدود التي تشغل على $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ و $ف$ الى الطرف الاول يلزم بكل مقدار للمتغير s أن يكون

$$(1) \left\{ \dots - \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$\left. - \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(s)^{\frac{1}{2}}}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{ف}{(1-s)^{\frac{1}{2}}} \right.$$

(٣) تكامل - ثانی

وبتحليل $(س)$ على حسب القوى التصاعديّة لذات الخدين $س-١$ يحدث

$$١ = (س) = (س)١ + (س)٢ + (س)٣ + \dots + (س)٢ + (س)١$$

وبمثل ذلك يحصل على تحليل للدالة $(س)$ مشابه لهذا الا انه حيث كان ١ جذرا مضاعفا بدرجة ٢ تكون $(س)١$ و $(س)٢$ و \dots و $(س)٢٢$ معدومة ويكون

$$(س)١ = (س)١ + (س)٢ + \dots + (س)٢٢ = (س)١ + (س)٢ + \dots + (س)٢٢$$

وبوضع مقداري $(س)١$ و $(س)٢$ هذين في المعادلة (١) والترتيب على حسب القوى التصاعديّة لذات الخدين $(س-١)$ يؤول الطرف الاول الى

$$(س)١ - (س)٢ + (س)٣ - (س)٤ + \dots + (س)٢٢ - (س)٢٣$$

$$\begin{aligned} & + (س)١ - (س)٢ + (س)٣ - (س)٤ + \dots + (س)٢٢ - (س)٢٣ \\ & + (س)١ - (س)٢ + (س)٣ - (س)٤ + \dots + (س)٢٢ - (س)٢٣ \\ & + \dots + (س)١ - (س)٢ + (س)٣ - (س)٤ + \dots + (س)٢٢ - (س)٢٣ \\ & + \dots + (س)١ - (س)٢ + (س)٣ - (س)٤ + \dots + (س)٢٢ - (س)٢٣ \end{aligned}$$

وحيث كان الطرف الثاني قابلا للقسمة على $(س-١)$ فيجب أن يكون الطرف الاول كذلك وحيث نلاحظ أن تكون معاملات جميع قوى $س-١$ في الطرف الاول الى معامل $(س-١)٢٢$ معدومة

وبما واهذه المعاملات بالصفر توجد معاملات عددها ٢ بدرجة أولى بهاتين $ف$ و $ف٢$ و $ف٣$ و \dots و $ف٢٢$

بالمقدار متى وضع $\frac{f(s)}{1(s)}$ بالصورة

$$\frac{f(s)}{1(s)} + \frac{1}{1-s} + \dots + \frac{1}{1-s^2} + \frac{f(s)}{1-s^2}$$

يوضع كذلك $\frac{f(s)}{1(s)}$ بالصورة

$$\frac{f(s)}{1(s)} + \frac{1}{1-s} + \dots + \frac{1}{1-s^2} + \frac{f(s)}{1-s^2}$$

و $\frac{f(s)}{1(s)}$ رمز لخارج قسمة $\frac{f(s)}{1(s)}$ على $(1-s)^2$ وبالاتقرار بهذه الكيفية ينتهي بتحصيل التحليل

$$\frac{f(s)}{1(s)} = \frac{f(s)}{1-s^2} + \dots + \frac{1}{1-s^2} + \frac{f(s)}{1-s^2}$$

$$\frac{1}{1-s^2} + \dots + \frac{1}{1-s^2} + \frac{f(s)}{1-s^2}$$

$$\frac{1}{1-s^2} + \dots + \frac{1}{1-s^2} + \frac{f(s)}{1-s^2}$$

$$\dots +$$

$$\frac{f(s)}{1-s^2}$$

وهو مقدار ذات ضرب في $\frac{f(s)}{1-s^2}$ يكون من السهل الحصول على تكامله

حالة خصوصية للجذور المضاعفة التخيلية

يؤيد إذا كان بعض الجذور المضاعفة للمعادلة $\frac{f(s)}{1(s)} =$ تخيليا يكون تحليل $\frac{f(s)}{1(s)}$

مشتلا على كيات تخيلية يمكن محوها بوضع الحدود الموافقة للجذور المقترنة بكيفية مناسبة الآن الأيسر العمل بالكيفية الآتية وهي

ومتى أجرى هذا الحساب بحال الكسر $\frac{٢(س)}{٢(س)}$ الى جملة حدود صورته تتعلق بموجب ما تقدم
بجنس العوامل ذات الحدين الداخلة في $٢(س)$
بمنسب حالة الجذور التحيلية المضاعفة توصل الى أخذ تكامل تفاضلات بالصورة

$$\frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]}$$

وفيها ٢ عدد صحيح موجب وللوصول اليه نضع

$$\frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢ + \frac{٢(س - ل) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢ = \frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢$$

فاذا جعل

$$٢(س - ل) + ٢ = ٢(س - ل) ٢(س) ٢$$

ويكون

$$\frac{٢}{٢(١ - ٢) ٢} = \frac{٢(س - ل) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢$$

$$= \frac{٢}{٢[٢ + ٢(ل - س)] (١ - ٢) ٢}$$

وهذا اذا كان $٢ < ١$ واذا كان $٢ = ١$ يكون

$$\frac{٢(س - ل) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢ = \frac{٢(س - ل) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢$$

ولم يبق علينا الا تعين

$$\frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢$$

ولاجل ذلك نجعل $س - ل = ع$ فيكون $س = ع + ل$ ويكون

$$\frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢ = \frac{٢(س + ق) ٢(س)}{٢[٢ + ٢(ل - س)]} ٢$$

وبئول الامر الى ايجاد

$$\frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$$

فهذه العملية الاخيرة هي التي نشتغل بها الآن فنقول وبالله التوفيق

بأنه من الواضح أن

$$(١) \quad \frac{٤٦٢٤}{٢^{٢(٤+١)}} ٤ - \frac{٤٦}{١-٢^{٢(٤+١)}} ٤ = \frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$$

لكن

$$, \quad \frac{٤٦٤٢}{٢^{٢(٤+١)}} ٤ \cdot \frac{١}{٢} = \frac{٤٦٢٤}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$$

$$\left[\frac{١}{١-٢^{٢(٤+١)}} - ١ \right] ٤ = \frac{٤٦٤٢}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$$

وحينئذ اذا أخذنا التكامل بالتجزى يحدث

$$\frac{٤٦}{١-٢^{٢(٤+١)}} ٤ \cdot \frac{٢-٢٢}{٢-٢٢} + \frac{٤}{١-٢^{٢(٤+١)}} (٢-٢٢) = \frac{٤٦٢٤}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$$

وبهذه الطريقة يتبذل البحث عن $\frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$ الى البحث عن $\frac{٤٦}{١-٢^{٢(٤+١)}} ٤$

وبئول هذا يتبذل الامر الى البحث عن $\frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}} ٤$ وهلم جرا وحيث كان ٢ عددا

صحيا موجبا فيتوصل أخيرا الى البحث عن $\frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}}$ الذي يساوى قوس ظا ٤ وحينئذ

$$\text{يوجد } \frac{٤٦}{٢^{٢(٤+١)}} ٤ \text{ معينا وبذلك يتعين } \frac{(٢+١) ٤}{٢^{٢(٢+١)}} ٤$$

تـمـرـيـنـات

$$١ \quad \frac{٢^{٢+٢-٢}}{٢^{٢+٢-٢}} ٤ = \frac{٢^{٢-٢}}{٢^{٢-٢}} ٤ = ٤$$

$$٢ \quad \frac{6}{(١ - \text{سه})} = \frac{1}{\text{سه}^2} + \frac{1}{\text{سه}} + \frac{1}{\text{سه}^3} + \dots$$

$$٣ \quad \frac{6}{\text{سه}^2 + \text{سه}^3 + \text{سه}^4 + \text{سه}^5 + \dots} = \frac{1}{(١ - \text{سه})^2} + \frac{1}{\text{سه}^2} + \frac{1}{\text{سه}^3} + \dots$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$٤ \quad \frac{6(١ - \text{سه})}{\text{سه}^0 + \text{سه}^1 + \text{سه}^2 + \text{سه}^3 + \dots} = \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

$$- \frac{7}{20} + \frac{7}{200} + \frac{7}{2000} + \dots$$

الفصل الثالث

في حساب تكامل الدوال التفاضلية الغير جذرية

في الدوال التي لا تحتوي الاعلى كيات غير جذرية ذات حد واحد
بيد كل دالة لا تحتوي الاعلى حدود غير جذرية يمكن دائماً أخذ تكاملها مثلاً لنفرض ان
المطلوب ايجاد

$$\frac{6(\sqrt[3]{\text{سه}} + 1)}{\sqrt[3]{\text{سه}} + 1}$$

فهذا التكامل يمكن وضعه هكذا

$$\frac{6(\sqrt[3]{\text{سه}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\text{سه}}} + 1)}{\frac{1}{\sqrt[3]{\text{سه}}} + 1}$$

فاذا جعل

$$\text{سه} = \text{سه}^3 \quad \text{يكون} \quad 6 \text{سه}^2 = 6 \text{سه}^0$$

ويوجد هذا الكسر الجذري وهو

$$\frac{6(1 - \text{سه}^2 + \text{سه}^3)}{\text{سه}^3 + 1} \quad \text{او}$$

ولنأخذ ع - سه فبتربيع الطرفين يحدث

$$٥ + سه = ع - ٢ سه ع$$

ويكون

$$(١) \quad سه = \frac{ع - ٥}{ع + ٥},$$

$$(٢) \quad \sqrt{٥ + سه + سه + سه} = ع - سه = \frac{ع + ٥ + ٥}{ع + ٥},$$

$$(٣) \quad سه = \frac{ع(ع + ٥) - ٥(ع - ٥)}{(ع + ٥)^2} = \frac{ع(ع + ٥) - ٥(ع - ٥)}{(ع + ٥)^2}$$

وبوضع المقادير (١) و (٢) و (٣) في الدالة المعلومة نؤول الى دالة جذرية للمتغير ع
بشكل متى كان $٥ < .$ يمكن أيضاً أن يجعل

$$\sqrt{٥ + سه} = \sqrt{سه + سه + سه}$$

وبالتربيع وقسمة الطرفين على سه يحدث

$$٥ + سه = سه + سه + سه$$

واذن يكون

$$(٤) \quad سه = \frac{٥ - سه}{ع - ١}$$

$$(٥) \quad \sqrt{٥ + سه + سه + سه} = ع - سه = \frac{ع + ٥ - سه}{ع - ١}$$

$$(٦) \quad سه = \frac{ع(ع - ١) - ٥(ع + ٥)}{(ع - ١)^2}$$

بشكل (مثالان) الاول - ليكن المطلوب حساب

$$\frac{سه}{\sqrt{سه + سه + سه}}$$

فلذلك يستعمل التحويل الاول بأن يجعل

$$\sqrt{سه + سه + سه} = ع - سه$$

(٤) تكامل - ثانياً

وبموجب القانونين (٢) و (٣) يحدث

$$\left(\frac{ع}{٢} + \frac{د}{٢} \right) ل = \frac{ع د}{ع + \frac{د}{٢}} ل = \frac{٢ ع د}{٢ ع + د + ٢} ل$$

وحيث أن اذ اقوض ع بمقداره وهو $٢ + د + ٢$ سره يحدث

$$\left(\frac{ع}{٢} + \frac{د}{٢} \right) ل = \frac{٢ ع د}{٢ ع + د + ٢} ل$$

ومنى كان $د = ٠$ يؤل هذا القانون الى

$$\left(\frac{ع}{٢} + \frac{د}{٢} \right) ل = \frac{٢ ع د}{٢ ع + د + ٢} ل$$

الثانى - ليكن المطلوب حساب

$$\frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل$$

فن السهل رجوع هذا التكمال الى المتقدم لان

$$\frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل = \frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل$$

وليستبه الى أنه لو كان بسط العدالة المفروضة هو $\frac{د}{٢} + ٢$ سره لا يمكن أخذ تكامل هذه العدالة مباشرة ومن الواضح أن

$$\frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل + \frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل = \frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل$$

وحيث أن يكون

$$\frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل + \frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل = \frac{٢ ع د (ف + د + ع)}{٢ ع + د + ٢} ل$$

$$= \left(\frac{ع}{٢} + \frac{د}{٢} \right) ل + \left(\frac{ع}{٢} + \frac{د}{٢} \right) ل + ٢ =$$

۲۷۔ ولنتشغل الان بأخذ تكامل

$$s(s, \sqrt{s^2 + s + 6})$$

فَنَقُولُ بِإِذْنِ اللَّهِ التَّوْفِيقِ

إذا كان $\alpha < 0$. يمكن استعمال التحويل الثاني بأن نضع

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

وحيث يكون

$$e_m + \sqrt{e_r} = m - s$$

واذا يكون

$$(1) \quad , \quad \frac{\overline{y_{t-1}}}{x_{t-1}} = \dots$$

$$(r) , \frac{\sqrt{r^2 - \varepsilon^2} + \sqrt{r}}{\varepsilon + 1} = \sqrt{r + \varepsilon + \sqrt{r}}$$

$$(r) \quad \frac{26(27 - 25 - 27^2)}{(25 + 1)} = 26$$

٢٨۔ وھنالۂ تحویل ثالث بہ ممکن حساب تکامل

$$s(s, \sqrt{s^2 + s^2 + s^2})$$

منی کان جذرا ذات الثلاثة حدود $h + d + s + s$ حقیقین

ولذلك نفرض أولاً أن إشارة الحد S_n الموجود تحت علامة الجذر هي +

وانفرض أن l و e جذرا المعادلة

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

فکون

$$(e - s)(l - s) = r + s^2 + 2$$

ولنحمل

$$\sqrt{(l-1)} = \sqrt{s^2 + s + 1} \quad \text{أى} \quad (l-1) = s^2 + s + 1$$

فيكون

$${}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}} \quad \text{أو} \quad {}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}})(\mathbf{l}-\mathbf{e})$$

وبناء على ذلك يكون

$$(1) \quad , \quad \frac{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e})}{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}-1} = \mathbf{e}^{\mathbf{r}}$$

$$(2) \quad , \quad \frac{{}^{\mathbf{e}}(\mathbf{l}-\mathbf{e})}{{}^{\mathbf{e}}-1} = {}^{\mathbf{e}} \left(\mathbf{l} - \frac{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e})}{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}-1} \right) = {}^{\mathbf{e}}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \sqrt{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e} + \mathbf{e}^{\mathbf{r}} + \mathbf{e}}$$

$$(3) \quad \frac{{}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e})^2}{{}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{e}}+1)} = \frac{{}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) + {}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) - {}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}({}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}-1))}{{}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{e}}+1)} = \mathbf{e}^{\mathbf{r}}$$

ويلاحظ تغيير هذه القوانين متى كان الحد $\mathbf{e}^{\mathbf{r}}$ مسبوفا بإشارة - فيكتب في هذه الحالة

$$(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}})(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\mathbf{r}} - \mathbf{e} + \mathbf{e}$$

ثم يجعل

$${}^{\mathbf{e}}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \sqrt{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}} + \mathbf{e}}$$

فيكون

$${}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}}$$

واذن يكون

$$(4) \quad , \quad \frac{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}+\mathbf{e})}{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}+1} = \mathbf{e}^{\mathbf{r}}$$

$$(5) \quad , \quad \frac{{}^{\mathbf{e}}(\mathbf{l}-\mathbf{e})}{{}^{\mathbf{e}}+1} = {}^{\mathbf{e}}(\mathbf{l}-\mathbf{e}) = \sqrt{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}} + \mathbf{e}}$$

$$(6) \quad \frac{{}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}(\mathbf{e}-\mathbf{l})^2}{{}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{e}}+1)} = \frac{{}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}(\mathbf{l}+\mathbf{e}) - {}^{\mathbf{e}}\mathbf{e}(\mathbf{l}+\mathbf{e}) - {}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}({}^{\mathbf{r}}\mathbf{e}+1))}{{}^{\mathbf{r}}({}^{\mathbf{e}}+1)} = \mathbf{e}^{\mathbf{r}}$$

بذلك يمكن تطبيق هذه الطريقة لحساب

$$\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{r}}}{\sqrt{{}^{\mathbf{r}}\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\mathbf{r}} + \mathbf{e}}}$$

غير أن الأبسط ابتداءً هذا التكامل إلى

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E}$$

ولذلك يكتب

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E}$$

ثم يجعل

$$\sqrt{6}-1 = \sqrt{6}-1 \quad \text{فيكون} \quad \sqrt{6}-1 = \sqrt{6}-1$$

وإذا كان يكون

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E}$$

وإذا كان $\mathcal{E} = 0$ يكون

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} \mathcal{E}$$

بذلك بالطرق المتقدمة يمكن أخذ تكامل أي دالة جذرية بالصورة

$$\mathcal{E} (\sqrt{6}-1, \sqrt{6}+1)$$

نشتغل على جذرين تربيعيين موضوعين على كيتين ذاتي حدين بدرجة أولى

لأنه لو جعل

$$\mathcal{E} = \sqrt{6}+1$$

يكون

$$\mathcal{E} = \sqrt{6}-1, \quad \mathcal{E} = \sqrt{6}+1, \quad \mathcal{E} = \sqrt{6}-1$$

وحينئذ نقول الدالة $\mathcal{E} (\sqrt{6}-1, \sqrt{6}+1)$ كاسر إلى دالة مشتمل

في $\mathcal{E} (\sqrt{6}-1, \sqrt{6}+1)$ يمكن أخذ تكاملها بموجب ما تقدم في هذا الفصل

في التفاضلات ذات الحدين وفي حالات امكان أخذ التكامل

بتأخذ التفاضل ذو الحدين ما كان بالصورة

$$س^{\frac{1}{2}} (١ + ٣ س^{\frac{1}{2}}) س^{\frac{1}{2}}$$

التي فيها م و ٣ عددان صحيحان فان كانا كسرين يمكن تحويلهما الى عددين صحيحين

مثلا اذا كان التفاضل ذو الحدين المعلوم هو $س^{\frac{1}{2}} (١ + ٣ س^{\frac{1}{2}}) س^{\frac{1}{2}}$ يجعل $س = ع$

فيكون $س = ٦ ع$ ويؤول الامر الى أخذ تكامل $٦ ع (١ + ٣ ع) س^{\frac{1}{2}}$ وهذا

تفاضل ذو حدين فيه اس ع خارج القوسين وداخلهما عددان صحيحان

وزيادة على ذلك يمكن ان يفرض ان $٣ < ٦$. لانه اذا اريد أخذ تكامل $س^{\frac{1}{2}} (١ + ٣ س^{\frac{1}{2}}) س^{\frac{1}{2}}$

يمكن جعل $س = \frac{١}{٦}$ لاجل ايلولة عملية حساب التكامل الى حساب تكامل

$$- ع^{-٢} (١ + ٣ ع) س^{\frac{1}{2}} ع$$

والذي فيه أس المتغير داخل القوسين موجب

وأما ع فيجب فرضه كسريا لانه اذا كان ع عددا صحيحا موجباً تحدث تحليل $(١ + ٣ س^{\frac{1}{2}}) س^{\frac{1}{2}}$

كمية كثيرة الحدود صحيحة واذا كان ع صحيحا وسالبا تكون المسئلة أخذ تكامل كسر جذري

وفي كلتي هاتين الحالتين يحصل التكامل بموجب الطرق التي ذكرناها فيما تقدم

بتأخذ لاجل ايجاد احوال أخرى يمكن فيها أخذ تكامل $س^{\frac{1}{2}} (١ + ٣ س^{\frac{1}{2}}) س^{\frac{1}{2}}$ يوضع

$$١ + ٣ س^{\frac{1}{2}} = ع$$

فيكون

$$س = (١ - ع)^{\frac{1}{2}} \text{ و } س^{\frac{1}{2}} = \frac{١}{٢} (١ - ع)^{-\frac{1}{2}}$$

ويؤول التفاضل الى

$$\frac{١}{٢} ع (١ - ع)^{-\frac{1}{2}}$$

وتكون عملية أخذ التكامل ممكنة اذا كان

$$(١) \quad \frac{١ + ٢}{٢} = \text{عددا صحيحا}$$

وفي الواقع اذا كان ع مساويا لكسر $\frac{١}{٢}$ فيجعل $ع = س$ يؤول الامر الى حالة دالة جذرية

وحينئذ تكون عملية أخذ التكامل ممكنة

ببند وهنالك حالة أخرى فيها علمية أخذ التكامل ممكنة فبكتابة التفاضل ذي الحدين بهذه الصورة

$$س^ع + س^{ع-١} (١ + س) = س^ع$$

يقول الشرط المتقدم ذكره الى $\frac{١ + س^{ع-١}}{س} = ١$ أى

$$(٢) \quad ١ + \frac{١ + س}{س} = س$$

وهذا شرط قد يستوفى حين لم يستوفى الاول

مثلا اذا اعتبر التفاضل $س^١ (١ + س)$ يكون

$$\frac{١ + س}{س} = ١ + \frac{١}{س} \quad \text{و} \quad \frac{١ + س}{س} = ١ + \frac{١}{س}$$

ويوجد الشرط الثانى مستوفيا فقط

في اختصار أس سه خارج القوسين

ببند حيث انه لا يمكن على العموم أخذ تكامل التفاضل ذي الحدين $س^ع (١ + س)$ كما سه فيلزم تحويله الى تكاملات أبسط منه ويتوصل اليها بتطبيق قاعدة أخذ التكامل بالتجزئة ولذا يكتب

$$س^ع (١ + س) = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١}$$

وذلك يجعل

$$\frac{س^{ع+١} (١ + س)}{(١ + س)} = س^{ع+١} \quad \text{و} \quad \frac{س^ع (١ + س)}{(١ + س)} = س^ع$$

واذن يكون

$$(١) \quad س^ع (١ + س) = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١} = س^ع + س^{ع+١}$$

والتكامل الجديد الموجود في هذا القانون يكون أبسط من التكامل المفروض اذا كان م موجبا وأكبر من س وكان س سالبا لان $١ + س$ يكون مقداره المطلق اذالك > ١ الا انه يمكن ايجاد قانون فيه أس سه خارج القوسين يكون منقوصا فقط ولذلك يكتب

$$\begin{aligned} \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{1+\text{ع}} &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^1 \\ &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}} + \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}\text{ب}^{\text{ع}} \end{aligned}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\begin{aligned} &\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{1+\text{ع}} \\ &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}} + \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}\text{ب}^{\text{ع}} \end{aligned}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة (١) يحدث

$$\begin{aligned} &\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}} \\ &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{1+\text{ع}} - \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}\text{ب}^{\text{ع}} \\ &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}} \frac{1+\text{ع}-\text{ع}}{(1+\text{ع})} - \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}\text{ب}^{\text{ع}} \frac{1+\text{ع}-\text{ع}}{(1+\text{ع})} \end{aligned}$$

وحينئذا حول الحد الأخير الى الطرف الأول واختصر يحدث

$$(أ) \left\{ \begin{aligned} &\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}} \\ &= \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{1+\text{ع}} - \text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}\text{ب}^{\text{ع}} \frac{1+\text{ع}-\text{ع}}{(1+\text{ع})} \end{aligned} \right.$$

وحينئذ نؤمل مسألة البحث عن $\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}$ الى البحث عن

$$\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}$$

وبمثل ذلك يتعلق هذا التساؤل الأخير بهذا

$$\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}$$

وهلم جرا بحيث اذا كان م موجبا أو أكبر من ١ وفرض ان ١ < م أكبر مضاعف لعدد ١

أقل من م ترجع العملية بعد عمليات اختصار عددها الى

$$\text{م}^{\text{ع}}(1+\text{ب}^{\text{ع}})^{\text{ع}}$$

فإذا كان $m - 1 = 2 = 2 - 1$ فإن هذا التكامل الأخير يمكن تحصيله مباشرة لأنه يؤل
اذن ذلك إلى

$$m^{(2)} (1 + b^{(2)})^m = m^{(2)} (1 + b^{(2)})^{1+2} + \frac{(1 + b^{(2)})^{1+2}}{(1 + 2)b^{(2)}}$$

لكن المتساوية $m - 1 = 2 = 2 - 1$ تؤل إلى $\frac{1+2}{2} = 1 + 1$ ويكون الشرط الأول
من شرطى امكان أخذ التكامل مستوفيا

ومنى كان $2 = 1 + m + 1 = 0$ يؤل الطرف الثانى من معادلة (أ) إلى $\alpha - \alpha$ ويكون
هذا القانون ضالا لكن حيث ان $\frac{1+2}{2} + 2$ يساوى صفرا أى يساوى عددا صحيحا فيقع
في الحالة الثانية من امكان أخذ التكامل ويمكن تحصيل التكامل مباشرة

في اختصار أس ذات الحدين

بمعاد في التحويل (أ) كان الاختصار جازيا على أس m خارج القوسين بخلاف العامل
 $(1 + b^{(2)})^m$ فإنه لم يتغير أصلا ويمكن الآن إجراء العكس أى ترك العامل m باقيا على
حاله وإزالة البحث عن التكامل المذكور ونسأل إلى البحث عن تكامل فيه أس $(1 + b^{(2)})^m$
منقوصا عن أصله بعدة آحاد
لان

$$m^{(2)} (1 + b^{(2)})^m = m^{(2)} (1 + b^{(2)})^{m+1} \frac{1+m}{1+m}$$

وحينئذ إذا أخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} m^{(2)} (1 + b^{(2)})^m \\ m^{(2)} (1 + b^{(2)})^{m+1} \frac{1+m}{1+m} - \frac{m^{(2)} (1 + b^{(2)})^m}{1+m} = \end{array} \right.$$

وهذا القانون ينقص أس ذات الحدين بواحد الآن أس m خارج القوسين يزيد أحاد قدرها
 2 ولأجل اختصار هذا الأس الأخير يغير m بالمقدار $m + 2$ و 2 بالمقدار $2 - 1$
في المعادلة (أ) فيحدث

(٥) تكامل - ثانى

$$\begin{aligned} & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{1-\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \\ & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{1-\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \frac{1(1+\text{م})}{(1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ})} - \frac{\text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}}}{(1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ})} = \\ & \text{وبوضع هذا المقدار في معادلة (ب) يحدث} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \frac{\text{ع} \text{بـ} \text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}}}{(1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ})(1+\text{م})} - \frac{\text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}}}{1+\text{م}} = \\ & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{1-\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \frac{\text{ع} \text{بـ}}{1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ}} + \end{aligned}$$

وبالاختصار يحدث

$$(ب) \left\{ \begin{aligned} & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \\ & \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{1-\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} \frac{\text{ع} \text{بـ}}{1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ}} + \frac{\text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}}}{1+\text{م}+\text{ع} \text{بـ}} = \end{aligned} \right.$$

وبواسطة هذا القانون ينقص بالتوالي من ع جميع الاحاد التي يتتوى عليها هذا الاس
بـ $\text{سـ}^{\text{ع}+\text{م}}$ القانون (ب) يصير ضالماً متى كان

$$0 = 1 + \text{م} + \text{ع} \text{بـ}$$

الا أنه اذ ذلك يقع في الحالة الثانية من الاحوال التي يمكن فيها أخذ التكامل ويتحصل على
التكامل المطلوب بتغيير المتغير

والخاص أنه باستعمال القانونين (أ) و (ب) يتعلق التكامل $\text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}}$
حيثما يكون م و ع موجبين بهذا التكامل البسيط وهو

$$\text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}-\text{م}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\text{ع}-\text{م}} \text{لـ} \text{سـ}^{\text{ع}}$$

الذي فيه ع \geq أكبر مضاعف لعدد بـ أقل من م و ك الجزء الصحيح للعدد ع
مثلاً يحول التكامل

$$\text{لـ} \text{سـ}^{\frac{1}{2}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\frac{1}{2}} \text{لـ} \text{سـ}^{\frac{1}{2}}$$

الى $\text{لـ} \text{سـ}^{\frac{1}{2}} (1 + \text{بـ} \text{سـ})^{\frac{1}{2}} \text{لـ} \text{سـ}^{\frac{1}{2}}$ بإيادته على التوالي بواسطة القانون (أ) الى هذين التكاملين

للمسألة (١ + ب سر) $\frac{1}{2}$ مس و للمسألة (١ + ب سر) $\frac{1}{2}$ مس
ويحول هذا الأخير بواسطة القانون (ب) الى حدين

للمسألة (١ + ب سر) $\frac{1}{2}$ مس و للمسألة (١ + ب سر) $\frac{1}{2}$ مس

قانوني الاختصار في الحالة التي يكون فيها الاسان م و ح ساليين

يستند متى كان الاسان م و ح ساليين فإنه لا يمكن تحويل التفاضل ذي الحدين بواسطة القانونين (أ) و (ب) الى تفاضل ذي حدين أخصر منه الا أن هذين القانونين يوصلان الى قانونين جديدين يجري بهما الاختصار في هذه الحالة

فلنستغل أولاً بتقيص اس سر خارج القوسين فنقول وبالله التوفيق

لاجل ذلك نستخرج من المعادلة (أ) مقدار التكامل للمسألة (١ + ب سر) $\frac{1}{2}$ مس فيحدث

$$\frac{1}{2} \text{ مس} (١ + ب سر) \frac{1}{2} \text{ مس}$$

$$= \frac{\text{مس}^{1+2} (١ + ب سر)^{1+2}}{1 (١ + 2 - ٢)} - \frac{\text{مس}^{1+2} (١ + ب سر)^{1+2}}{1 (١ + 2 - ٢)}$$

ثم نغير م - 2 بالعدد - م أي نغير م بالعدد - م + 2 فيحدث

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\text{مس}^{1+2} (١ + ب سر)^{1+2}}{1 (١ - ٢)} - = \text{مس}^{1+2} (١ + ب سر) \frac{1}{2} \text{ مس} \\ & + \frac{\text{مس}^{1+2} (١ + ب سر)^{1+2}}{1 (١ - ٢)} - = \text{مس}^{1+2} (١ + ب سر) \frac{1}{2} \text{ مس} \end{aligned} \right.$$

وبتكرار استعمال هذا القانون يمكن ايلولة التكامل المطلوب ايجادها الى هذا

$$\text{مس}^{1+2} (١ + ب سر) \frac{1}{2} \text{ مس}$$

الذي فيه 2 أكبر مضاف لعدد 2 منحصر في م

فإذا كان

$$1 - 2 = 2 (1 + 2) + م -$$

بزل التكامل الاخير الى

$$1 + \frac{(1 + \epsilon^2)^{1+\epsilon}}{(1 + \epsilon)^{1+\epsilon}} = \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

وحيث ان

$$\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} = \epsilon - \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$$

فيقع في الحالة الاولى من حالات امكان اخذ التكامل

بـ ٣٨ ومتى كان ϵ سالبا يخرج من القانون (ب)

$$\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

$$= \frac{(1 + \epsilon^2)^{1+\epsilon}}{\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} + \frac{(1 + \epsilon^2)^{1+\epsilon}}{\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} =$$

فاذا غير $\epsilon - 1$ في هذا الناتج بالعدد ϵ أى غير ϵ بالعدد $\epsilon - 1 + 1$ يحدث

$$(ج) \left\{ \begin{aligned} \frac{(1 + \epsilon^2)^{1+\epsilon}}{(1 - \epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} &= \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \\ \frac{(1 + \epsilon^2)^{1+\epsilon}}{(1 - \epsilon)^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}} &= \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} \end{aligned} \right.$$

فانا كان $\epsilon < 1$ يكون المنذر المطلق لاس ذات الحدين قد نقص بواحد وباستمرار الاختصار

ينتهى حينئذ بما يؤوله هذا الاس الى أن يكون محصورا بين ٠ و ١

واذا كان $\epsilon = 1$ يصير هذا القانون ضالا الا ان هذه الحالة احدهى الحالات التى يمكن فيها اخذ التكامل

بـ ٣٩ وكل تفاضل بالصورة

$$\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

يمكن وضعه بالصورة $\epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} (1 + \epsilon^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}})^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$ ويصير حينئذ تفاضلا ذا حدين

بنسبة بالقوانين المتقدمة يمكن أخذ التكامل

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}}$$

الذي يقع دائماً في إحدى الحالتين اللتين يمكن فيهما أخذ التكامل فبواسطة القانون (١) يحدث

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

ويجعل $m = 1$ و 2 و 3 و 4 و 5 ... بالتوالي يوجد

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

.....

ومن هنا يكون

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \cdot \frac{1}{m} + \frac{\sqrt{r-1}}{m}$$

وعلى العموم إذا كان m فردياً يكون

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r-1}} \left[\frac{(1-m) \times 1 \times 2}{m \times \dots \times 2 \times 1} + \dots + \frac{(1-m)}{m(2-m)} + \frac{1-m}{m} \right] =$$

واذا جعل $\text{لوسه} = \text{ع}$ في هذا القانون يحدث

$$\text{ه} \text{ ع}^2 \text{ ه}^2 \text{ م} = \text{ع}^2 \text{ م} \left[\text{ع}^2 - \frac{\text{ع}}{\text{م}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{م}} + \frac{\text{ع}^2 (1-\text{ع})}{\text{م}} - \dots \right] + \text{ث}$$

الثاني - ليكن المطلوب حساب

$$\text{ه} (\text{قوس حاسه})^2 \text{ م}^2$$

فهنا يلزم جعل

$$\text{ع} = \text{قوس حاسه} \text{ و } 1 = \text{ع}$$

فيكون

$$\text{ط} = \text{ه} \text{ ع} \text{ م}^2 = \text{م}^2 \text{ و}$$

$$\text{ز} = \text{ه} \text{ م}^2 = \frac{\text{م}^2}{\sqrt{1-\text{ع}^2}} \text{ و}$$

$$\text{ح} = \text{ه} \text{ م}^2 = \frac{\text{م}^2}{\sqrt{1-\text{ع}^2}} \text{ و}$$

$$\text{ل} = \text{ه} \text{ م}^2 = \frac{\text{م}^2}{\sqrt{1-\text{ع}^2}} \text{ و}$$

$$\text{م} = \text{ه} \text{ م}^2 = \text{م}^2$$

وهلم جراً وبوضع هذه المقادير في القانون (١) وأخذ كل من م^2 و $\sqrt{1-\text{ع}^2}$ مضروباً مشتركاً يحدث

$$\text{ه} (\text{قوس حاسه})^2 \text{ م}^2$$

$$= \text{م}^2 \left[\text{ع}^2 - \frac{\text{ع}}{\text{م}} - \frac{\text{ع}^2}{\text{م}} + \frac{\text{ع}^2 (1-\text{ع})}{\text{م}} - \dots \right] +$$

$$\sqrt{1-\text{ع}^2} \left[\dots + \frac{\text{ع}^2}{\text{م}} - \frac{\text{ع}^2 (1-\text{ع})}{\text{م}} + \dots \right]$$

ومتى كان ع عدداً صحيحاً موجباً انتهى هاتان المتسلسلتان من نفسيهما

واذا جعل قوس حاسه $= \text{ع}$ يحدث

$$\sqrt{1-\text{ع}^2} = \text{ح} \text{ م}^2 \text{ و } \text{م}^2 = \text{ح} \text{ ع}^2$$

وبئول القانون المتقدم الى

$$h \frac{e}{e} \text{ ح ا ع ٦ ع}$$

$$[\dots - \frac{e}{e} (3-2)(2-2)(1-2)2 + \frac{e}{e} (1-2)2 - \frac{e}{e}] \text{ ح ا ع} =$$

$$[\dots + \frac{e}{e} (2-2)(1-2)2 - \frac{e}{e} + \dots] \text{ ح ا ع}$$

وغير ذلك فان هذا القانون ينتج من قانون آخر أعم لان

$$h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} = س (س) \text{ ح ا س ه} - h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} \text{ و}$$

$$h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} = س (س) \text{ ح ا س ه} - h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} \text{ و}$$

$$h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} = س (س) \text{ ح ا س ه} - h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س}$$

وهلم جزاً واذن يكون

$$h \frac{e}{e} (س) \text{ ح ا س ه س} = [س (س) - س (س) + س (س) - \dots] \text{ ح ا س ه}$$

$$+ [س (س) - س (س) + س (س) - \dots] \text{ ح ا س ه}$$

ويمكن دائماً تحصيل التكامل اذا كانت $س (س)$ دالة جبرية صحيحة

بشأن متى كان 2 عدداً سالباً أو كسراً فان القانون (١) يشتمل على عدد غير منته من الحدود

واذ ذلك يلزم استعمال التبايلات لايجاد التكامل

(مثالان) - اذا أريد ايجاد

$$h \frac{e}{e} \text{ ح ا ع ٦ ع}$$

حينما يكون 2 عدداً صحيحاً موجبا يؤخذ التكامل بالتعزى فيجذب

$$h \frac{e}{e} \text{ ح ا ع ٦ ع} = \frac{1}{1-2} + \frac{h \frac{e}{e}}{1-\frac{e}{e}(1-2)} = \frac{h \frac{e}{e} \text{ ح ا ع ٦ ع}}{1-\frac{e}{e}}$$

وبواسطة هذا القانون يعلق التكامل المطلوب بهذا

$$h \frac{e}{e} \text{ ح ا ع ٦ ع}$$

(٦) تكامل - ثانياً

الذى لم يمكن تحصيله الى الآن الا بواسطة متسلسلة ذات حدود عددها غير منتهى والقانون المذكور

$$\text{يستعمل يجعل } ع = \text{لوسه لا ياوله } \frac{\text{كاسه}}{(\text{لوسه})} \text{ الى } \frac{\text{كاسه}}{\text{لوسه}}$$

اثنانى - ايكن المطلوب حساب

$$\frac{\text{هسه كاسه}}{(\text{سه} + 1)}$$

فلذلك يجعل

$$1 + \text{سه} = ع \text{ فيكون } \text{سه} = ع - 1$$

ويؤل التكامل المفروض الى

$$\frac{\text{هسه}^{1-ع}}{ع} \frac{1-ع}{ع} = ع \frac{\text{هسه}^{1-ع}}{ع} - ع \frac{\text{هسه}^{1-ع}}{ع} \\ = \left(\frac{\text{هسه}^{ع}}{ع} - \frac{\text{هسه}^{ع}}{ع} \right) \frac{1}{\text{هسه}}$$

وبأخذ التكامل بالتجزئى يحدث

$$\frac{1}{ع} \text{هسه}^{ع} = ع \frac{1}{ع} \text{هسه}^{ع} - \left(\frac{1}{ع} \right) \text{هسه}^{ع} = \frac{\text{هسه}^{ع}}{ع} + \frac{\text{هسه}^{ع}}{ع}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{هسه}}{\text{سه} + 1} = \frac{1-ع}{ع} = \frac{\text{هسه}}{ع} \cdot \frac{1}{\text{هسه}} = \frac{\text{هسه كاسه}}{(\text{سه} + 1)}$$

فى حساب تكامل بعض دوال أسية ودائرية

يشهد يمكن تعيين التكاملين $\frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1}$ و $\frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1}$ بواسطة

قاعدة أخذ التكامل بالتجزئى لانه حيث كان $\frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} = \frac{\text{هسه}}{\text{سه} + 1}$ فيكون

$$\frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} = \frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} + \frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} = \frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} - \frac{\text{هسه كاسه}}{\text{سه} + 1} \quad (2)$$

ومن هاتين المعادلتين يستنتج

$$\text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{\text{ح}^{\text{ح}} (\text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} + \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}})}{\text{ح}^{\text{ح}} + \text{ح}^{\text{ح}}} + \text{ح}^{\text{ح}}$$

$$\text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{\text{ح}^{\text{ح}} (\text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} - \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}})}{\text{ح}^{\text{ح}} + \text{ح}^{\text{ح}}} + \text{ح}^{\text{ح}}$$

بالمقدّم يتحصل على التكامل

لح^ح (ح^ح و ح^ح) ح^ح

الذي فيه ح دالة جذرية بوضع

$$\text{ط} = \frac{1}{\text{ح}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ح}^{\text{ح}} = \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} \text{ح}^{\text{ح}}$$

$$\text{ح}^{\text{ح}} = \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} \text{ح}^{\text{ح}} - \frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} \text{ح}^{\text{ح}}$$

$$\frac{\text{ح}^{\text{ح}}}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} = \text{ح}^{\text{ح}}$$

واذا يكون

$$\frac{\text{ح}^{\text{ح}}}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} \left(\frac{\text{ح}^{\text{ح}}}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} \right) = \text{ح}^{\text{ح}} (\text{ح}^{\text{ح}} + \text{ح}^{\text{ح}}) \text{ح}^{\text{ح}}$$

وهذه دالة جذرية بالنسبة للمتغير ح

بالمقدّم وبالتبعض دوال دائرية توجدنا بالباقي الحسابات وتكاملاتها نتحصل بسهولة

الاولى

$$\text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{\text{ح}^{\text{ح}}}{\text{ح}^{\text{ح}} + 1} + \text{ح}^{\text{ح}}$$

ويمكن أيضا كتابة

$$\text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}}} \text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} = \frac{1}{\text{ح}^{\text{ح}}} \text{لح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} \text{ح}^{\text{ح}} (\text{ح}^{\text{ح}})$$

الثامنة

$$\frac{\text{كسره}}{\text{ح حاسه + د حاسه}} \text{ هـ}$$

فهنا يمكن استعمال الطريقة العمومية (بـ٤٤) الا ان الاوفق كتابة

$$\frac{\text{كسره}}{\frac{\text{ح حاسه}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{ح}^2}} + \frac{\text{د حاسه}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{ح}^2}}} \text{ هـ} = \frac{\text{كسره}}{\text{ح حاسه + د حاسه}} \text{ هـ}$$

فذا جعل

$$\frac{\text{د}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{ح}^2}} = \frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{ح}^2}} \text{ يكون حاك}$$

ويكون

$$\frac{\text{كسره}}{(\text{ح} + \text{د})} \text{ هـ} = \frac{\text{كسره}}{\text{ح حاسه + د حاسه}} \text{ هـ}$$

أو بملاحظة (الخامسة)

$$\frac{\text{كسره}}{\text{ح حاسه + د حاسه}} \text{ هـ} = \frac{\text{كسره}}{\sqrt{\text{د}^2 + \text{ح}^2}} \text{ و ط ا } \frac{\text{د} + \text{ح}}{\text{د}^2 + \text{ح}^2} + \text{ ث}$$

التاسعة

$$\frac{\text{كسره}}{\text{ح حاسه + د حاسه + و}}$$

في هذه الحالة يلزم استعمال الطريقة العمومية بأن يجعل ط ا $\frac{\text{د}}{\text{ح}}$ = ع فيتوصل الى أخذ تكامل هذا الكسر الجذري وهو

$$\frac{\text{ع د}^2}{(\text{ع} + 1)\text{د} + (\text{ع} - 1)\text{د}^2}$$

وهذا التكامل هو اما

$$\frac{\text{قوس ط ا}}{\sqrt{\text{د}^2 - \text{د}^2 + \text{و}}} \text{ و (ب ط ا } \frac{\text{د}}{\text{د}^2 - \text{د}^2 + \text{و}} + \text{ ح}$$

واما

$$\frac{\text{و}}{\sqrt{\text{د}^2 - \text{د}^2 + \text{و}}} \text{ و (د} \frac{\text{د}}{\text{د}^2 - \text{د}^2 + \text{و}} + \text{ ح} + \frac{\text{و}}{\sqrt{\text{د}^2 - \text{د}^2 + \text{و}}} + \text{ ث}$$

في حساب تكامل التفاضلات التي بالصورة

$$\text{حاسة حاسة حاسة}$$

بشد اذا جعل حاسة = ع يكون

$$\text{حاسة} = (ع - ١)^{\frac{1}{٢}} \quad \text{و} \quad \text{حاسة} = (ع - ١)^{\frac{1}{٢}} = ٦٦$$

ويكون

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = ع (ع - ١)^{\frac{1-٢}{٢}} = ٦٦$$

ومن هنا يشاهد انه اذا كان ∞ عددا صحيحا فرديا موجبا كان أو سالبا يمكن أخذ التكامل مهما كان م وبمثل ذلك يشاهد انه اذا جعل حاسة = ع تكون عملية أخذ التكامل ممكنة متى كان م عددا صحيحا فرديا موجبا أو سالبا

وفي جميع الاحوال يمكن مهما كان م و ∞ تحويل هذا التكامل الى تكاملات اخرى أبسط منه بواسطة أخذ التكامل بالتجزئ فان

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = \text{حاسة حاسة حاسة} + \text{حاسة حاسة حاسة}$$

$$= \text{حاسة حاسة حاسة} + \text{حاسة حاسة حاسة} = \frac{\text{حاسة}^{١+٢}}{١+٢}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = \text{حاسة حاسة حاسة} + \frac{\text{حاسة}^{١+٢}}{١+٢} + \frac{\text{حاسة}^{١+٢}}{١+٢} \quad (١)$$

ويمكن استعمال هذا القانون متى كان م سالبا لان اذا كان يكون م + ٢ دامقدا مطلق أقل من م غير انه يمكن تحصيل قانون يكون فيه الاس ∞ منقوصا بوحدين ولذلك نلاحظ أن

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = \text{حاسة} (١ - \text{حاسة}) \text{ حاسة}$$

أو

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = \text{حاسة حاسة حاسة} - \text{حاسة حاسة حاسة}$$

واذن يكون

$$\text{حاسة حاسة حاسة} = \text{حاسة حاسة حاسة} - \text{حاسة حاسة حاسة}$$

وبوضع هذا المقدار في الارتباط (١) يحدث

$$\begin{aligned} & \text{هـ حاسه حاسه ٦ سه} \\ & = \text{حنا سه} \frac{1+2}{1+2} + \frac{1+2}{1+2} (\text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه} - \text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه}) \\ & \text{وبالاختصار يحدث} \end{aligned}$$

$$(ب) \left\{ \begin{array}{l} \text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه} \\ \text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه} \frac{1+2}{2+2} + \frac{1+2}{2+2} = \end{array} \right.$$

وعلى هذا ترجع عملية هـ حاسه حنا سه ٦ سه الى العملية هـ حاسه حنا سه ٦ سه
وبمثل ذلك نؤول هذه العملية الاخيرة الى هـ حاسه حنا سه ٦ سه وهلم جرا بحيث اذا كان ٢
عددا صحيحا موجبا يتوصل الى أحد التكاملين

$$\text{هـ حاسه ٦ سه} \quad \text{و} \quad \text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه}$$

وذلك بحسب ما يكون ٢ زوجيا أو فرديا فاما التكامل الاول فيحصل عليه باستعمال قانون
سند كره قريبان شاء الله تعالى وأما التكامل الثاني فيحصل عليه بغاية السهولة اذا ن

$$\text{هـ حاسه حنا سه ٦ سه} = \text{هـ حاسه ٦ سه} = \frac{1+2}{1+2} + 2$$

بقيد القانون (ب) يكون ضالامتي كان م = ٢ - غير أنه في هذه الحالة يتوصل
القانون (١) الى

$$\text{هـ طاسه ٦ سه} = \frac{1+2}{1+2} - \text{هـ طاسه ٦ سه}$$

فاذا أبيل الآن م + ٢ بالعدد م أى أبيل م بالعدد م - ٢ وحل بالنسبة الى
هـ طاسه ٦ سه يحدث

$$(ج) \quad \text{هـ طاسه ٦ سه} = \frac{1+2}{1-2} - \text{هـ طاسه ٦ سه}$$

وبهذا القانون يختصر اس طاسه ويتوصل بحسب ما يكون م زوجيا أو فرديا الى
هـ ٦ سه = سه + ٢ اولى هـ طاسه ٦ سه = - لو حنا سه + ٢

يتمتع بالقانون (ب) يختصر اس حاسه لكن يمكن الحصول به على قانون آخر بواسطة
يصغراس حاسه وذلك بان يدل s بالكمية $\frac{1}{p} - s$ و m بالعدد 2 و 2
بالعدد m في قانون (ب) فيحدث

$$(د) \left\{ \begin{array}{l} \text{حاسه حاسه} \\ \text{حاسه حاسه حاسه} \end{array} \right. = \frac{1-m}{2+m} + \frac{1+m}{2+m} \text{حاسه حاسه حاسه}$$

وبهذا القانون يصغراس حاسه متى كان m موجبا وقد شوهد انه اذا كان 2 عددا
محجوزا زوجيا يتحول التكامل المقروض بواسطة القانون (ب) الى التكامل حاسه حاسه
وهذا التكامل الاخير يتحول بواسطة القانون (د) الى $\text{حاسه حاسه} = - \text{حاسه} + \text{ث}$
متى كان m فرديا والى التكامل $\text{حاسه حاسه} = s + \text{ث}$ متى كان m زوجيا وحينئذ
متى كان m و 2 عددين محجيين موجبين يمكن دائما ايجاد التكامل

$$\text{حاسه حاسه حاسه}$$

باعتد القانونان اللذان تحصلنا عليهما لا يمكن استعمالهما في الحالة التي يكون فيها أحد الاسين
 m و 2 سالبا أو كان الاثنان سالبين لكن يمكن أن يستخرج منهما قانونان آخران بهما يمكن
الاختصار في هاتين الحالتين الاخيرتين

فلنفرض ان m سالبا وقد يكون 2 موجبا أو سالبا فبالدال m بالعدد $-m + 2$
في القانون (د) والحل بالنسبة للتكامل الموجود في الطرف الثاني يحدث

$$(هـ) \text{حاسه حاسه} = \frac{2-2-m}{1-m} + \frac{1+m}{(1-m)\text{حاسه حاسه}} \text{حاسه حاسه حاسه}$$

وحينئذ يتحول من التكامل المقروض الى حاسه حاسه أو الى $\frac{\text{حاسه حاسه}}{\text{حاسه}}$
بحسب ما يكون m زوجيا أو فرديا

يتمتع اذا جعل $2 = 0$ في القانون (د) حدث

$$(و) \text{حاسه حاسه} = \frac{1-m}{m} + \frac{1+m}{m} \text{حاسه حاسه حاسه}$$

وبناء على ذلك اذا كان م زوجيا يحدث

$$(ز) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{ حاسه } 6 \text{ حاسه } = \frac{\text{حاسه}}{2} - \left[\text{حاسه}^1 + \frac{1-2}{2-2} \text{ حاسه}^2 \right] \\ & \frac{1 \times 3 \times \dots (2-2)(1-2)}{2 \times 4 \times \dots (4-2)(2-2)} \text{ حاسه} + \dots + \frac{1 \times 3 \times \dots (2-2)(1-2)}{(4-2)(2-2)} \text{ حاسه}^5 \\ & + \frac{1 \times 3 \times \dots (3-2)(1-2)}{2 \times 4 \times \dots (4-2)(2-2)} \times \frac{1}{2} + \dots \end{aligned} \right.$$

واذا كان م فرديا يحدث

$$(ح) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{ حاسه } 6 \text{ حاسه } = \frac{\text{حاسه}}{2} - \left[\dots + \frac{1-2}{2-2} \text{ حاسه}^2 + \text{حاسه}^1 \right] \\ & \frac{1 \times \dots (3-2)(1-2)}{2 \times \dots (4-2)(2-2)} + \dots \end{aligned} \right.$$

وبهذه الكيفية يحصل

$$\frac{1}{2} \text{ حاسه } 6 \text{ حاسه}$$

الفصل الخامس

في التكمالات المحدودة

تعريفات واصطلاحات

يسمى متى كانت ϕ دالة للمتغير s تفاضلها $\phi'(s)$ حاسه يكون

$$\phi'(s) = \phi(s) + \theta$$

والدالة $\phi(s) + \theta$ تسمى التكمال الغير محدود للتفاضل $\phi'(s)$ حاسه وعادة يتعين مقدار الثابت الغير معين θ بموجب شرط انعدام التكمال بمقدار مخصوص α يعطى للمتغير

s فهذا الفرض يكون $\theta = -\phi(1)$ ويكون

$$\phi'(s) = \phi(s) - \phi(1)$$

(٧) تكامل - ثانيا

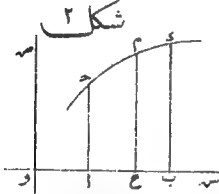
ويبقى أيضا في هذا المقدارية من غير معينة لكن اذا اعطى مقدار مخصوص ب المتغير من فان التكامل الذي يؤتى الى $\int (b) - \int (a)$ يكون معيناً تعيناً تاماً ويستدل عليه بالرمن $\int (b) - \int (a)$ وبسمى تكاملاً محدوداً مأخوذاً بين النهايتين a و b أو من $a = 1$ الى $b = 1$ وحينئذ يكون

$$\int (b) - \int (a) = \int (b) - \int (a)$$

ويفهم من هنائه يحصل على التكامل المحدود بجعل $a = 1$ ثم $b = 1$ في التكامل الغير محدود و طرح الناتج الاول من الثاني

التفسير الهندسي للتكامل المحدود

بئس ذلك لكن $\int (b) - \int (a)$ المتخني الذي معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هي $\int (b) - \int (a)$ فقد شوهد ان $\int (b) - \int (a)$ هو تفاضل مساحة الجزء المحدود برأسي متغير وحينئذ يكون $\int (b) - \int (a)$ هو المساحة المحصورة بين المتخني ومحور السينات ورأسيين حيثما اتفق لكن اذا كان الثابت الاختياري معيناً بموجب شرط كون ان التكامل أى المساحة يكون معدوماً متى كان $a = 1$ و $b = 1$ وكان $\int (b) - \int (a) = 0$



افنى نقطة حيثما اتفق من المتخني يكون مقدار التكامل بمقدار $\int (b) - \int (a)$ هذا هو السطح $\int (b) - \int (a)$ وبناء على ذلك اذا جعل فيه $a = 1$ و $b = 1$ يكون مقدار التكامل المئين كما ذكرنا بالرمن $\int (b) - \int (a)$ هو السطح $\int (b) - \int (a)$ المحصور بين المتخني والمحور x والرأسيين الثانيين a و b

أمثلة على التكاملات المحدودة

$$\int (x^2) = \frac{x^3}{3} + C$$

بئس الاول

$$\int (x^2) = \frac{x^3}{3} + C$$

بئس الاول اذا كان $1 + 2$ موجبا .

الثاني

$$\frac{1}{0 + \sqrt{2} - \sqrt{2}} = (\text{س})$$

$$\frac{1}{12\sqrt{2}} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{12\sqrt{2}} \text{ قوس طا } \frac{1}{12\sqrt{2}} + \text{ث}$$

$$\frac{1}{8} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{12\sqrt{2}} = \left(\text{قوس طا } \frac{0}{12\sqrt{2}} - \text{قوس طا } \frac{2}{12\sqrt{2}} \right) \text{ قوس طا } \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{2} = \text{قوس طا } \frac{1}{2} + \text{ث} \quad \text{الثالث}$$

$$\frac{1}{4} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{4} = \text{قوس طا } \frac{1}{4} + \text{ث}$$

$$\frac{1}{2} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{2} = \text{قوس طا } \frac{1}{2} + \text{ث} \quad \text{الرابع}$$

$$\frac{1}{2} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{2} = \text{قوس حاسه } \frac{1}{2} + \text{ث} \quad \text{الخامس}$$

$$\frac{1}{2} = (\text{س}) \text{ كسره } \frac{1}{2} = \frac{(1-2) \dots 0 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times \dots 6 \times 4 \times 2} \quad \text{السادس}$$

وهذا التكامل الأخير يستنتج من القانون (ز) المذكور في (ب) الذي يجمع حدوده
تتعدم بالنهايتين ماعدا الأخير

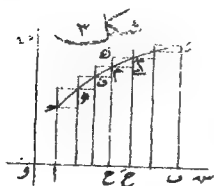
التكاملات المحدودة معتبرة نهايات حواصل جمع

يتعد قد فرض فيما تقدم أن د (س) محدودة ومستمرة من س = ١ إلى س = ب
وفي هذه الحالة أقول أن التكامل المحدود $\int_a^b f(x) dx$ د (س) كسره هونهاية مجموع المقادير الصغيرة
جد التفاضل د (س) كسره متى تغير س بدرجات غير محسوسة من ١ إلى ب
ولابد أن ذلك نفرض لاجل ثبات الفكر أن $a > ١$ ونفرض أن د (س) متزايدة على الدوام
من ابتدا د (١) إلى د (ب) ونعتبر المنحنى ح م د
الذي معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هي

$$y = f(x)$$

ولیکن $a = ١$ و $b = ١$ و $c = ١$ و $d = ١$

$$m = c \text{ و } n = f$$



فقد شوهد في حساب التفاضل أن المساحة Δ تساوي نهاية مجموع مستطيلات
لأنها بعدد المستطيل Δ لكن $\Delta = \Delta$ (س) ف س
وحينئذ إذا رمزنا لمجموع كافة هذه المستطيلات بالرمز Δ (س) ف س [يكون
مساحة Δ = Δ (س) ف س = Δ (س) ف س] Δ (س) ف س
وهو المطلوب إثباته

تنبيهات على التكاملات المحدودة

٥٧ في التانوس

(١) Δ (س) ف س = Δ (ب) - Δ (أ)
قد يكون أ أصغر من ب وقد يكون أكبر منه انما في العادة يكون أ أصغر من ب
فاذا لم يكن الامر كذلك فإنه يمكن بسهولة الرجوع هذه الحالة الى الحالة المتقدمة لانه بالقانون (١)
يوجد أن

$$(٢) \quad \Delta$$

وحينئذ يكون

$$(٣) \quad \Delta$$

فعلى هذا يمكن تغيير وضعي نهايتي التكامل المحدود بشرط أن تغير إشارة الناتج
٥٨ إذا كان Δ مقدارا للمتغير س محصورا بين أ و ب يكون

$$\Delta$$

$$\Delta$$

واذن يكون

$$\Delta$$

وبمثل ذلك يثبت أن

$$\Delta$$

$$=$$

وقيس على هذا

واذن يكون

$$\frac{1}{b} < \frac{6}{\sqrt{17 - 6s}} < \frac{1}{b}$$

لكن

$$\frac{1}{b} = 0.0 \quad , \quad \frac{6}{\sqrt{17 - 6s}} = \text{قوس حاص} = 0.0236777$$

فاذن يكون

$$0.0 < \frac{6}{\sqrt{17 - 6s}} < 0.0236777$$

في التكاملات المحدودة التي تصير فيها النهايات لانهاية

بالتدق قد فرضنا الى الآن ان النهايتين a و b في التكامل $\int_a^b f(x) dx$ (س) محدودة وان الدالة $f(x)$ (س) محدودة ومستمرة بين هاتين النهايتين ولنبحث الآن عما يؤول اليه التكامل متى كانت احدى النهايتين ولتكن b مثلاً لانهاية وكانت الدالة $f(x)$ (س) محدودة ومستمرة فنقول ان في هذه الحالة يكون مقدار التكامل هو نهاية $\int_a^b f(x) dx$ (س) متى زاد b الى ما لانهاية وهذا المقدار قد يكون محدوداً أو لانهاية أو غير معين كما يشاهد في الامثلة الآتية وهي

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx \quad \text{بالتدق الاول}$$

فهنا

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

وحينئذ يكون

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

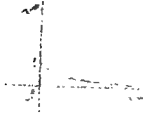
وبجعل $b = \infty$ يكون

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{a}$$

فأذا رسم المنحنى الذى معادلته $y = \frac{1}{x}$ يتحصل فرع لانحنائى تقربى للمحور و $y = 0$

ويكون التكامل المحدود دالاعلى المساحة المحصورة بين هذا الفرع والرأسى و $x = 1$ والمحور و $y = 0$

شكل



الثانى $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

فى هذه الحالة

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

$$\text{الثالث} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$$

فالتكامل الغير محدود هو

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{وانه يكون} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{p-1}$$

$$\text{وحينئذ يكون} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left[-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{p-1}$$

$$\text{الرابع} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$$

$$\text{فهنا} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{الخامس} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx$$

$$\text{هنا} \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx = \left[-\frac{1}{4x^4} \right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

لكن متى مال ب الى لا نهاية لا يميل حاب الى نهاية محدودة مطلقا وحينئذ يكون مقدار

التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ حاسم غير معين

بذلك يمكن احيا نامعرفة ان كان التكامل

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

له مقدار محدود متى مال ب الى ∞ أم لا

فلنفرض أن β كبير جدا غير أنه محدود فبالرمز بحرف λ لكلمة محصورة بين α و β يكون

$$\beta \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} = \lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} + \lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ}$$

وحيث أن λ د (سـ) محدودة فيكون الجزء الاول من التكامل كلمة محدودة ويكفي حينئذ أن
يختبر هل الجزء الآخر $\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ}$ محدودا أم لا ولذلك نضع د (سـ) بهذه
الصورة

$$\frac{(\text{سـ})}{\text{سـ}} = \text{د } (\text{سـ})$$

و λ د (سـ) رمز لـ λ المحدودة بجميع مقادير سـ الاكبر من λ وليكن μ أكبر المقادير
التي تأخذها λ د (سـ) بجميع مقادير سـ الاكبر من λ و μ أصغرها فيكون

$$\frac{\mu}{\text{سـ}} > \lambda \text{ د } (\text{سـ}) > \frac{\lambda}{\text{سـ}}$$

وحيثئذ يكون

$$\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} > \mu \frac{\lambda}{\text{سـ}} \text{ كـاسـ}$$

أو

$$\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} > \frac{\mu}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} - \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} \right)$$

فحيث كان $\frac{\lambda}{\text{سـ}} < 1$ بول الطرف الثاني من هذه المتباينة حينما يكون $\text{سـ} = \infty$ الى
 $\frac{\mu}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} \frac{\lambda}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}}$ وحينئذ يكون للتكامل $\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ}$ في هذه الحالة مقدارا محدودا

واذا كان $\frac{\lambda}{\text{سـ}} > 1$ يكون

$$\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} < \mu \frac{\lambda}{\text{سـ}} \text{ كـاسـ}$$

أو

$$\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ} < \frac{\mu}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} \left(1 - \frac{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}}{1-\frac{\lambda}{\text{سـ}}} \right)$$

وحيث كان $1 - \frac{\lambda}{\text{سـ}} > 0$ موجباً في الطرف الثاني من هذه المتباينة لانها $\frac{\lambda}{\text{سـ}}$ حينما يكون $\text{سـ} = \infty$

واذن يكون $\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ}$ وبالاتبعية له $\lambda \text{ د } (\text{سـ}) \text{ كـاسـ}$ لانها $\frac{\lambda}{\text{سـ}}$ حينما يكون $\text{سـ} = \infty$

واذا كان $\infty = 1$ يكون

$$\frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } < \frac{1}{x} \text{ كاسه } = \frac{1}{x} \text{ م لو (ب)}$$

وحيث ان لو (ب) $= \infty$ حينما يكون $\infty = 1$ فيكون

$$\frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } = \infty$$

في التكاملات التي تصير فيها الدالة الموضوعة تحت علامة \int لانهاية

بين نهايتي التكامل أو بهاتين النهايتين

يستند اذا صارت الدالة \int (س) لانهاية بالمقدار $\infty = 1$ يعين $\frac{1}{x}$ د (س) كاسه
بالبحث عن نهاية التكامل $\frac{1}{x}$ د (س) كاسه متى مالت الصغيرة $\frac{1}{x}$ الى الصفر
وكذا اذا كان $\infty = 1$ يبحث عن نهاية $\frac{1}{x}$ د (س) كاسه متى تناقص $\frac{1}{x}$ الى
أن آل الى الصفر

واذا كان ∞ د (ب) لانهاية أو غير مستمر (وحرف ∞ رمز لكمية محصورة بين ∞ و ∞)
يلاحظ أن

$$\frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } = \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } + \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه}$$

وذلك حينما يتناقص $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x}$ الى أن يؤول الى الصفر

يستند متى صارت الدالة \int (س) لانهاية باحدى النهايتين أو بمقدار محصور بينهما يمكن
في الغالب معرفة أن كان مقدار التكامل محدوداً أو لانهاية فلنفرض مثلاً ان $\infty = 1$
ولتكن

$$\frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } = \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } + \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه}$$

وحرف ∞ رمز لعدد موجب و $\frac{1}{x}$ دالة محدودة بالمقدار $\infty \geq 1$ ولترمز بحرف ∞
لكمية محصورة بين ∞ و ∞ وقرئتم ∞ بقدر ما يراد فيكون

$$\frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } = \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه } + \frac{1}{x} \text{ د (س) كاسه}$$

(٨) تكامل - ثانياً

وحيث كان مقدار $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه محدودا فيكون معرفة هل $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه محدود أم لا ولترمز بحرفي م و م' لتبئين اذا غير س من ك الى ب تكون د (س) محصورة بينهما فيقتدير س هذه اذا كان $\frac{1}{b} > 1$ يكون

$$د(س) > \frac{1}{b-1}$$

واذن يكون

$$\frac{1}{b} د(س) > \frac{1}{b} \frac{1}{b-1} > \frac{1}{b} \frac{1}{b-1} [(ب-ك) - \frac{1}{b-1}]$$

ومتى مال ف الى الصفر يعيل الطرف الثاني من هذه المتباينة الى المقدار المحدود $\frac{1}{b-1} (ب-ك)$ واذن يكون مقدارها $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه وبالتبعية $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه محدودا

والآن أقول انه اذا كان $\frac{1}{b} < 1$ يكون التكامل المفروض لانها بيا لان

$$د(س) < \frac{1}{b}$$

واذن يكون

$$\frac{1}{b} د(س) < \frac{1}{b} \frac{1}{b-1} < \frac{1}{b-1} \left[\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} \right]$$

وحيث كان $\frac{1}{b} < 1$ في مال ف الى الصفر يصير الطرف الثاني لانها بيا وحينئذ بالاولوية يعيل $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه الى ما لانها بيا

ومثل هذا يحصل اذا كان $\frac{1}{b} = 1$ لان من المتباينة

$$د(س) < \frac{1}{b}$$

يستنتج

$$\frac{1}{b} د(س) < \frac{1}{b} \frac{1}{b-1} < \frac{1}{b-1} \frac{1}{b}$$

والطرف الثاني يصير لانها بيا متى انعدم ف واذن يكون $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه وبالتبعية $\frac{1}{b}$ د (س) كاسه لانها بيا

٦٦ مثالان

الاول
$$\frac{6s}{s^2 - 17s + 2}$$

١) و ب كبتان موجبتان و ح دالة للمتغير سه محدودة بجميع مقادير سه المحصورة بين ١ و ب فيمكن كتابة

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(s-b)} = \frac{1}{s-b} \times \frac{2}{s+b} = \frac{2}{s^2 - 17s + 2}$$

وذلك يجعل

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(s-b)} = \frac{2}{s^2 - 17s + 2}$$

وحيث كل أس ب - سه > ١ فينتج من القاعدة المتقدمة أن $\frac{6s}{s^2 - 17s + 2}$ يكون مقداره محدودا

الثاني
$$\frac{6s}{s^2 - 17s}$$

فهنا

$$s^2 - 17s = s(s - 17)$$

وحيث يدكون

$$s^2 - 17s = s(s - 17)$$

واذن يكون

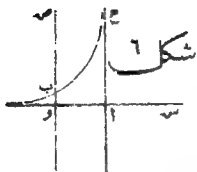
$$s = \frac{6s}{s^2 - 17s}$$

ولاجل تفسير هذا الناتج نرمم المعنى الذى معادلته سه = $\frac{1}{s^2 - 17s}$ فهذا المعنى له

اخطان تقريبان أحدهما محور السينات والآخر مواز ح محور الصادات وتباعده عن

بالبعد $a = 1$ ، حينئذ يحدد أن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

يدل على المساحة المحصورة بين OB و OA والمنحنى وخطه التقريبي AC . ويعلم من ذلك أنه ولو أن هذه القطعة تمدد إلى ما لا نهاية الآن مقدارها محدود



في التكاملات الغير معينة

بالتد قديصير التكامل المحدود غير معين وهذا هو الواقع في التكامل

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ حاسه } \infty - \infty$$

لانها صار سـ لانها لا يلا يميل حاسه الى نهاية محدودة مطلقا

وهذا مثلا آخر وهو

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(أ و ب كيتان موجبتان حينما اتفق) فحينئذ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ بصير لانها لا يباحينما يكون سـ = ٠ . وهو مقدار محصور بين -1 و $+1$ فيلزم وضع

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ثم تنقيص ف و لـ الى أن يؤول الى الصفر وحينئذ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

فيكون

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

واذن يكون

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

وحيث أنه ليس هنالك أدنى ارتباط بين الكميتين المتغيرتين ف و لـ فلا تعميل النسبة $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ الى نهاية محدودة مطلقا وبما على ذلك يكون التكامل غير معين

في أخذ التكامل بواسطة المتسلسلات

بأنه إذا علمت دالة تفاضلية وتكن ϕ (س) وأمكن تحليل ϕ (س) الى متسلسلة تقاربية وتكن

$$(١) \quad \phi = \phi_0 + \phi_1 + \dots + \phi_n + \dots$$

تحصل بالضرب في ϕ وأخذ التكامل بين نهايتين ١ و ٢

$$(٢) \quad \left\{ \begin{aligned} \phi \phi &= \phi_0 \phi + \phi_1 \phi + \dots + \phi_n \phi + \dots \\ \phi \phi &= \phi_0 \phi + \phi_1 \phi + \dots + \phi_n \phi + \dots \end{aligned} \right.$$

فإذا كانت المتسلسلة (١) تقاربية بالمقدارين $\phi = ١$ و $\phi = ٢$ وبجميع مقادير س المحصورة بين ١ و ٢ فإنه يمكن فرض أن $\phi > \phi$ (ف كمية صغيرة بقدر ما يراد) بشرط أن يكون كبيراً على قدر الكفاية واذالك يكون

$$\phi \phi > \phi \phi \quad \text{أو} \quad \phi \phi > \phi \phi \quad \phi - \phi$$

ويعلم من ذلك أن $\phi \phi$ يتناقص الى الصفر متى زاد ϕ الى ما لا نهاية وينتج من ذلك ان المتسلسلة

$$\phi \phi + \phi \phi + \dots + \phi \phi + \dots$$

تكون تقاربية ويكون مجموعها ϕ (س) ϕ ويمكن تعويض المقدار الثابت ϕ بالكمية ϕ ويكون

$$(٣) \quad \phi \phi = \phi \phi + \phi \phi + \dots + \phi \phi + \dots$$

بأنه هذا القانون صحيح أيضاً بالمقدار $\phi = ٢$ حتى لو كانت المتسلسلة $\phi + \phi + \dots$ التقاربية متى كان ϕ أصغر من ϕ تصير تباعدياً بالمقدار $\phi = ٢$ بشرط أن تكون المتسلسلة (٢) تقاربية أيضاً

لأنه مهما كان صغراً الكمية الموجبة ϕ يكون

$$\phi \phi = \phi \phi + \phi \phi + \dots + \phi \phi + \dots$$

وحيث كان الطرفان دالتين مستقرتين للمتغير s ومتساويتين على الدوام فيجب أن تكون نهايتهما حينئذ يكون $f = 0$ متساويتين واذن يكون

$$f(s) = 6s^6 + 6s^5 + 6s^4 + \dots$$

بـ ٧٠ د وعلى العموم إذا أمكن تحليل $f(s)$ بموجب قانون (مكوران) إلى متسلسلة تقاربية هكذا

$$f(s) = (0)s + (0)s^2 + (0)s^3 + \dots + (0)s^r + \dots$$

يكون

فـ $f(s) = 6s^6 + 6s^5 + 6s^4 + \dots + (0)s^r + \dots$
 وإذا أريد استنتاج التكامل المحدود $f(s)$ أعنى إذا أريد أن يتدنى التكامل بالمقدار $s = 0$ أى يكون معدوماً حينئذ يكون $s = 0$ يلزم أن يكون s معدوماً وفي هذه الحالة يكون

$$f(s) = 6s^6 + 6s^5 + 6s^4 + \dots + (0)s^r + \dots$$

أمثلة على أخذ التكامل بواسطة المتسلاطات

بـ ٧١ د الاول $\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

فعملية قسمة بسيطة توجد أن

$$\frac{1}{s+1} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots + (-1)^n s^n + \dots$$

وحينئذ يكون

$$\frac{1}{s+1} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots + (-1)^n s^n + \dots$$

ومتى كان المقدار المطلق للمتغير $s > 1$ تكون المتسلسلة $1 - s + s^2 - s^3 + \dots$ تقاربية

فحيثئذ تكون المتسلسلة $s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \dots$ تقاربية أيضاً

فيما بين نفس نهايتي s ويعلم من ذلك أنه متى كان $1 < s < 1$ يكون

$$\frac{1}{s+1} = 1 - s + s^2 - s^3 + \dots + (-1)^n s^n + \dots$$

الثاني $\frac{1}{r+1} = \frac{r}{r+1} - \frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{r+1}$ قوس طاسه

فهنا

$$\frac{1}{r+1} = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots + \frac{r^{2n-1}}{r+1} - \frac{r^{2n}}{r+1}$$

وحرف $\frac{1}{r+1}$ رمز لعدد موجب فردى فاذا أخذت كمال الطرفين وفرض ان قوس طاسه أصغر الاقواس الموجبة التى ظلها r يوجد

$$\text{قوس طاسه} = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \dots + \frac{r^{2n-1}}{2n-1} - \frac{r^{2n}}{2n}$$

والمتسلسلة $1 - r + r^2 - r^3 + \dots$ لا تكون تقاربية متى كان $r = 1$

غير ان المتسلسلة $r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \dots$ تكون تقاربية أيضا بالمقدار $r = 1$ واذن يكون

$$\text{قوس طاسه} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

الثالث $\frac{1}{r-1} = \frac{r}{r-1} - \frac{r-1}{r-1} = \frac{1}{r-1}$ قوس حاسه

بقانون ذات الحدين يوجد

$$(1) \dots + \frac{r^{2n-1}}{2n-1} + \frac{r^{2n}}{2n} = \frac{1}{r-1}$$

وبضرب الطرف الثانى فى r وأخذ التكمال يحدث

$$(2) \dots + \frac{r^{2n-1}}{2n-1} + \frac{r^{2n}}{2n} = r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \dots$$

وهذه متسلسلة تكون تقاربية متى كان $1 < r < 1$ اذن المتسلسلة (1) تقاربية بين هاتين النهايتين

والمتسلسلة (1) لا تكون تقاربية بالمقدار $r = 1$ غير ان حيث انه بالمقدار $r = 1$

حاصل $\frac{1}{r}$ تكون المتسلسلة (2) تقاربية أيضا بموجب ما تقررى (١٩٦٩) يكون

$$\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{r^{2n-1}}{2n-1} + \frac{r^{2n}}{2n}$$

ويتحصل على متسلسلة أسرع تقارب يجعل $r = \frac{1}{r}$ ويكون

$$\dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{r}$$

الباب الثاني

في التطبيقات الهندسية لحساب التكامل

الفصل الاول

في حساب المساح المتوية

قوانين عمويميه

٧٢. ليكن $ح$ د المتحنى الذى معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هي $صه = د(سه)$

ولترمز بحرف $ق$ للمساحة $ا ح م ع$ وبحرفي $سه$ و $صه$ لاحداثي نقطة متغيرة $م$ فيكون

$$ق = صه = صه(سه) = د(سه)$$

واذن يكون

$$ق = د(سه)$$

فاذا اريد أن تكون المساحة محدودة بالرأسى $ح ا$ المطابق لللاقى $وا = ا$ وجب أن يتدنى التكامل بالمقدار $سه = ا$ ويكون

$$ق = د(سه)$$

وحرف $سه$ رمز للاقى نقطة حينما اتفق من المتحنى

ثم انه اذا حددت المساحة بالرأسى $د$ المطابق لللاقى $سه = و$ و $ق = و$ يكون

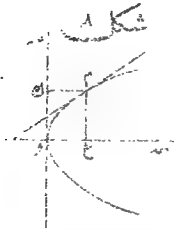
$$ق = المساحة ا ب ح د = د(سه)$$

واذا كان المحوران مائلين وفرض أن $ع$ الزاوية الواقعة بينهما يكون

$$مساحة ا ب ح د = ح ا و د(سه)$$

أمثلة على حساب مساح المنحنيات المتسوية للاحداثيات مستقيمة

٧٣- لنفرض قطاعا مكافئا حيثما اتفق $\text{صه} = \text{ع م}$ (م و د عددان موجبان) ونفرض أن $\text{ومع} = \text{ن}$ فيكون



$$\text{ن} = \text{صه} = \text{ع م} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ م} = \frac{1}{2} \text{ م}$$

ويكون

$$\text{ن} = \text{بقي صه} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ م} = \frac{1}{2} \text{ م}$$

وهذا الناتج يمكن وضعه هكذا

$$\text{ن} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \text{ م} = \frac{1}{2} \text{ م}$$

و سه صه عبارة عن مساحة المستطيل ومع م ك المنشأ بأحداثي نقطة م وحينئذ يكون

$$\text{ومع} : \text{ومك} :: \text{د} : (\text{د} + \text{م})$$

أو

$$\text{ومع} : \text{ومك} :: \text{د} : \text{م}$$

ويفهم من هنا أن القطع المكافئ يقسم المستطيل ومع م ك بنسبة د : م

٧٤- وبالعكس ليست هذه الخاصية الالفة قطاعات المكافئة لأنه يمكن كتابة التناسب المتقدم هكذا

$$\text{ن} : (\text{سه صه} - \text{ن}) :: \text{د} : \text{م}$$

واذن يكون

$$\text{ن} (\text{د} + \text{م}) = \text{د} \text{ سه صه}$$

وبناء على ذلك يجب ان يكون

$$(\text{د} + \text{م}) \text{ ن} = \text{د} \text{ سه صه} + \text{م} \text{ سه صه}$$

وحيث أن $\text{ن} = \text{سه صه}$ فيكون

$$(\text{د} + \text{م}) \text{ سه صه} = \text{د} \text{ سه صه} + \text{م} \text{ سه صه}$$

أو

$$\text{م} \text{ سه صه} = \text{م} \text{ سه صه}$$

(٩) تكامل - ثاني

وهذا الناتج يمكن وضعه هكذا

$$م \frac{٦}{٣} = ٥ \frac{٦}{٣}$$

وبأخذ التكامل يحدث

$$٥ \frac{٦}{٣} = م \frac{٦}{٣} + ث \quad \text{أو} \quad ٥ \frac{٦}{٣} = ل \frac{٦}{٣} + ث$$

فاذا وضع ث بالصورة ل و ح تكون المعادلة العمومية للمنحنيات التي لها الخاصية المذكورة هي

$$٥ \frac{٦}{٣} = ل \frac{٦}{٣} \times م \frac{٦}{٣} \quad \text{أو} \quad ٥ \frac{٦}{٣} = م \frac{٦}{٣}$$

وفي حالة القطع المكافئ الاعتيادي الذي معادلته $٥ = م$ يكون $٢ = ٥$ و $١ = م$ واذن يكون

$$٢ = ٥ = م$$

٧٥. ولتعتبر منحنيان اصناف القطع الزائد معلوما بمعادلة وهي

$$م \frac{٦}{٣} = ٥$$

م و ٥ عدنان هيجان موجبان

ولم يرسم بالشكل الا الفرع الموجود في الزاوية ص و س الذي المحوران الاحداثيان خطان تقريبيان له ولنفرض

أن $٥ < م$ ونفرض أن

$$٥ = ا ح م و ا = ا و ح = م$$

فيكون

$$٥ = م \frac{٦}{٣} = م \frac{٦}{٣} \times م \frac{٦}{٣} = م \frac{٦}{٣}$$

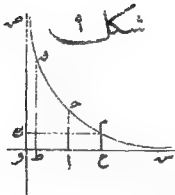
وبأخذ التكامل يحدث

$$\left(\frac{٢-٥}{٢} - \frac{٢-٥}{٢} \right) \frac{١}{٢} = ٥$$

فيشاهد انه اذا زاد س الى ما لا نهاية تزداد المساحة ا ح م الى ما لا نهاية كذلك واذن

م ح ثابتا ونقص ا الى الصفر يزداد السطح بالاستقرار لكن مع بقاءه على الدوام محدودا وعند

النهاية أى متى كان $ا = ٥$. تؤل هذه المساحة الى



$$\frac{\frac{1}{2} \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$

وبناء على هذا ميل السطح ا ح ط الى نهاية محدودة كلما زاد قرب نقطة و من الخط التقريبي
وصه

وهذه النهاية التي تساوى $\frac{1}{2} \frac{2}{3}$ سره . سره $\frac{1}{2} \frac{2}{3}$ أول الكمية $\frac{2}{3}$ سره سره نسبتها الى
مساحة المستطيل و م ح ك = سره سره كنسبة و الى و - م أى ان

$$و : سره سره :: و : و - م$$

وذلك بارمز يحرف و للمساحة الانهائية التي نهاية مقدارها محدودة
بـ $\frac{1}{2}$ وبالعكس ليست هذه الخاصية الالعنخيات المحصورة في المعادلة سره سره = ح
لأنه من تناسب المتقدم يستنتج

$$و (و - م) = و سره سره$$

ومن هنا يكون

$$(و - م) ك و = و سره سره ك و + و سره سره ك و$$

وحيث ان ك و = سره سره ك و فبالاختصار والقسمة على سره سره يحدث

$$م - \frac{ك و}{سره سره} = \frac{ك و}{سره سره}$$

وبأخذ التكامل يحدث

$$و لَوْ سره سره = ن - م لَوْ سره سره$$

ويجعل ث = لَوْ ح يحدث

$$لَوْ سره سره = لَوْ ح سره سره$$

ومن هنا يكون

$$سره سره ح = ح$$

وفي الحالة الخصوصية التي يكون فيها م = و تؤل المعادلة

$$سره سره ح = ح$$

الى هذه

$$سره سره ح = ح$$

-٦٨-

التي تدل على قطع زائد قائم بدرجة ثانية ويكون

$$\frac{c}{s} = \frac{c}{s}$$

واذن يكون

$$\frac{c}{s} = \frac{c}{s}$$

وحينئذ يكون

$$c = c \cos \theta + c \sin \theta$$

فاذا كان $c = 1$ و $1 = 1$ يكون

$$c = c \cos \theta$$

أعني ان المساحة تكون مساوية للوغاريتم الطبيعي للـ 1

بـ 1. ولنعبر الآن الدائرة التي معادلتها

$$c^2 = c^2 + c^2$$

فن هذه المعادلة يستخرج

$$c = \sqrt{c^2 - c^2}$$

فباعتبار قطعة حيثما اتفق c و c محلوذة بمحور

الصادات و برأسي اختياري c والرمز لمساحة هذه

القطعة بحرف c يكون

$$(1) \quad c = \sqrt{c^2 - c^2}$$

وبأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$(2) \quad \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - c^2}} + \sqrt{c^2 - c^2} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - c^2}}$$

لكن

$$\frac{c^2 (c^2 + c^2 - c^2)}{\sqrt{c^2 - c^2}} = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - c^2}}$$

$$c = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - c^2}} - \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - c^2}}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٢) والتجويل والقسمه على ٢ يحدث

$$\frac{6\sqrt{r^2 - c^2}}{r^2 - c^2} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{2} = \frac{r^2 - c^2}{2}$$

لكن

$$\frac{6\sqrt{r^2 - c^2}}{r^2 - c^2} = \text{قوس حـ} + \text{ث}$$

فاذن يكون

$$\frac{6\sqrt{r^2 - c^2}}{r^2 - c^2} = \text{قوس حـ} + \frac{\sqrt{r^2 - c^2}}{2}$$

بالمبدأ ولنعبر القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ونفرض ان θ مساحة الجزء $وع$ من المحدود بمحور
الصادات وبرأى حيثما تفق $م$ $ع$ فن معادلة القطع
الناقص يستخرج

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{r^2 - c^2}{r^2}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{r^2 - c^2}{r^2}$$

فاذا راعى المحور $ح$ يجعله قطرا نصف محيط دائرة وفرضنا ان θ مساحة الجزء
 $ح$ و $ع$ يكون

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{r^2 - c^2}{r^2}$$

ومن هنا يستنتج ان

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{r}$$

فعلى ذلك تكون النسبة بين جزء القطع الناقص وجزء الدائرة المحددين في الافق كنسبة $ب$ الى $ح$
ويستنتج من ذلك انه اذا راعى محرف $ح$ للسطح الكامل للقطع الناقص ومحرف $ع$ لسطح
الدائرة يكون

$$ح : ع :: ب : ح$$

ومن هذا التاسب وملاحظة ان $ح = ط$ يستخرج

$$ح = ط \times \frac{ب}{ح} = ط \times ح$$

ويعلم من ذلك ان سطح القطع الناقص وسط متناسب بين سطحى الدائرتين اللتين قطرهما محورا
القطع الناقص

بشئ واذا اعتبر القطع الزائد الذى معادلته

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

تكون مساحة الجزء ا م ح معلومة بهذا القانون

$$u = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

وبأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$u = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

لكن

$$\frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

$$= \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

ومعلوم أن

$$\frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

وحينئذ يكون

$$u = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

واذن يكون

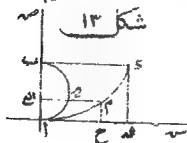
$$u = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) = \frac{b^2}{2} \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$$

بشئ ولنعتبر البيكلويد ا م د الحادث من حركة الدائرة ا د ب على المستقيم ب د

ونجعل الرأس ا اصلا للاحاديات ونجعل المماس للمنحنى والعمودى عليه فى هذه النقطة محورى الاحاديات

فتكون المعادلة التفاضلية للمنحنى هى

$$y' = \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



واذن يكون

$$\text{مساحة } \Delta م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح - \text{بجاء } م ح$$

ولمذ م ح عمود على ا ب فيصددى الدائرة ا ب ح جزء ا ل و بملاحظة أن

$$\text{ا ل} = \text{بجاء } م ح - \text{بجاء } م ح$$

يحدث

$$\text{جزء ا ل} = \text{بجاء } م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح - \text{بجاء } م ح$$

واذن يكون

$$\Delta م ح = \text{جزء ا ل}$$

فاذا جعل م ح = ط ح يكون م ح = ط ح ويكون

$$\Delta م ح = \frac{\text{ط ح}}{2}$$

وبطرح هذه المساحة من المساحة م ط ح أى مساحة المستطيل ا ب ح وتضعيف الناتج يكون

$$\Delta م ح = \frac{\text{ط ح}}{2}$$

أعنى ان المساحة المحصورة بين السيكلويد وقاعدته تساوى ثلاثة أمثال مساحة الدائرة الراجعة

في حساب مساحات المنحنيات المنسوبة لاجنات قطبية

بنشد اذا رمز بحرف ن لمساحة القطاع ح و م يكون

$$\Delta م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح$$

وحرفا و و رمز ان للاحدائين القطبيين لنقطة م

بنشد لتعتبر الخازون اللوغاريتمى الذى معادلته هى

$$\Delta م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح$$

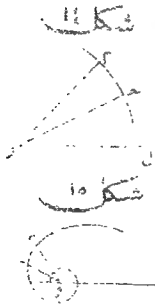
فيكون

$$\Delta م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح + \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح$$

فاذا جعلنا و ح = و جعلنا و ح = و فى القانون

$$\Delta م ح = \frac{1}{2} \times \text{بجاء } م ح = 0$$

يحدث



واذن يكون

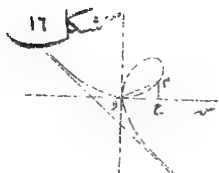
$$\frac{1}{\frac{1}{2}}(2-2) = 0$$

بمسألة قد يسهل أحيانا حساب المساح باستعمال الاحداثيات القطبية مثلا لنفرض المنحنى الذى معادلته

$$r^2 + r^2 - r^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

وهذا المنحنى المعروف بورقة ديكارت يتركب من فرعين لانهما يتبين تقابلان مع بعضهما فى نقطة الامل ولهما ما خط تقري هو المستقيم الذى معادلته

$$r = r + r + r$$



فبالاحداثيات الاصلية تستوجب المسئلة التى نحن بصدد حل معادلته بدرجة ثالثة لكن اذا أخذت المعادلة القطبية للمنحنى بوضع القطب فى نقطة و لا يكون هنالك الامقدار واحد لنصف القطر القطبي فى اتجاه معلوم لانه حيث كانت نقطة الاصل نقطة من دوجة فيجب أن تحقق المعادلة بمقدارين معدومين لنصف القطر القطبي و بناء على ذلك يكون الطرف الاول قابلا للقسمة على r^2

فاذا جعل r محورا قطبيا لنم تعويض r فى المعادلة (١) بالكمية $r \cos \theta$ و $r \sin \theta$ بالمقدار $r \sin \theta$ وبذلك يحدث

$$r^2(r^2 + r^2 - r^2 - r^2) = 0$$

وبحذف العامل r^2 والحل بالنسبة للمتغير r يحدث

$$(1) \quad \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r^2 + r^2} = 0$$

وغير ذلك اذا مر بمحرف r لمساحة الجزء وام يكون

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

وحيث اذا أبدل r بمقدار يحدث

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

ولايجاد هذا التكامل نضع

$$١ + طآو = ع \text{ فيكون } ع = ٣ طآو + حآو$$

واذن يكون

$$ث + \frac{١}{(٣ طآو + ١)} = ث + \frac{١}{ع} = \frac{٣}{ع} = \frac{٣}{٣ طآو + ١} = \frac{٣}{٣ طآو + ١} = \frac{٣}{٣ طآو + ١}$$

وبوضع هذا المقدار في مقدار ن يحدث

$$٧ = \frac{٣}{٣ طآو + ١} \cdot \frac{٣}{٣ طآو + ١} = \frac{٩}{(٣ طآو + ١)^2}$$

وحيث ان المساحة تنعدم حينما يكون و = ٠ فيكون ث = حآو واذن يكون

$$\frac{٩}{(٣ طآو + ١)^2} = ٧$$

وتحصل مساحة الورقة بنماها بجعل و = ط في مقدار ن الذي يؤل حينئذ الى حآو

اذان الكسر طآو الذي يمكن كتابته هكذا $\frac{١}{٣ طآو + ١}$ يصير مساويا للواحد متى كان

$$\frac{ط}{٣} = ١$$

الفصل الثاني

في حساب أطوال المنحنيات المستوية

قانون عام

بشأن اذا رمزنا بحرف س لقوس محصور بين نقطة ثابتة على منحني ونقطة على هذا المنحني احد اطيافها العمديان س و صه يكون

$$٧ = ٢ (٦ صه + ٦ صه)$$

(١٠) تكامل - ثاني

ولكن

$$ث + \left[\sqrt{ع^2 + ص^2} + ص \right] لو = \frac{ص}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} هـ$$

فأذن يكون

$$\frac{1}{ع} هـ \sqrt{ع^2 + ص^2} + \frac{ص}{ع} = \sqrt{ع^2 + ص^2} + ص \frac{ع}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} + \frac{ع}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} لو$$

وحيث يجب أن يعدم التكامل بالمقدار ص = . فيكون

$$. = \frac{ع}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} لو + ث \text{ ومن هنا يكون } ث = - \frac{ع}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} لو$$

وبوضع هذا المقدار في القانون يحدث

$$ص = \frac{ع}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} لو + \frac{ص}{\sqrt{ع^2 + ص^2}} \left(\sqrt{ع^2 + ص^2} + ص \right) لو$$

في طول قوس من قطع ناقص

بالمثل لنعبر القوس ب م من القطع الناقص محسوباً بالابتداء من الرأس ب

فن معادلة المنحنى وهى

$$ص^2 = ح^2 + ح^2$$

يستخرج

$$\frac{ص}{ح} = \frac{ص}{ح}$$

وجينذ يكون

$$ص = ح \sqrt{1 + \frac{ح^2}{ص^2}} = \frac{ح}{\sqrt{1 - \frac{ح^2}{ص^2}}} + 1$$

أو

$$\frac{ح}{\sqrt{1 - \frac{ح^2}{ص^2}}} = ح + 1$$

وللاختصار نضع $\sqrt{1 - \frac{ح^2}{ص^2}} = ح$ وحرف ف رمز للاختلاف المركزى أعنى النسبة

بين البعد البورى والمحور الأكبر فيحدث

$$ص = ح \sqrt{1 - \frac{ح^2}{ص^2}}$$

وحيث ان m يتغير من 0 الى ∞ فتحصل جميع مقادير m يجعل

$$m = \frac{1}{2} \text{ حاو}$$

وتغير m من 0 الى $\frac{1}{2}$ وحيث يكون

$$\frac{1}{2} \text{ حاو} = \frac{1}{2} \text{ حاو} \left| \frac{1 - \frac{1}{2} \text{ حاو}}{\frac{1}{2} \text{ حاو}} \right| = \frac{1}{2} \text{ حاو} - \frac{1}{4} \text{ حاو}$$

وبناء على ذلك يكون

$$m = \frac{1}{2} \text{ حاو} = \frac{1}{2} \text{ حاو} - \frac{1}{4} \text{ حاو}$$

بالمبدأ التكاملي $\frac{1}{2} \text{ حاو} - \frac{1}{4} \text{ حاو}$ دالة عالية لا يمكن تحصيل تكاملها الا بتحويلها الى متسلسلة فباستعمال قانون ذات الحد ينحدر

$$(1 - \frac{1}{2} \text{ حاو}) = 1 - \frac{1}{2} \text{ حاو} + \frac{1}{4} \text{ حاو}^2 - \frac{1}{8} \text{ حاو}^3 + \dots$$

$$\dots - \frac{1}{8} \text{ حاو}^3 + \frac{1}{16} \text{ حاو}^4 - \frac{1}{32} \text{ حاو}^5 + \dots$$

وحيث يكون طول القوس m هو

$$(1) \quad \left[1 - \frac{1}{2} \text{ حاو} + \frac{1}{4} \text{ حاو}^2 - \frac{1}{8} \text{ حاو}^3 + \dots - \frac{1}{2^n} \text{ حاو}^n + \dots \right] = m$$

ويتحصل على تكاملات الطرف الثاني بهذا القانون

$$\left(\frac{1}{2} \text{ حاو} \right) = \frac{1}{2} \text{ حاو} + \frac{1}{4} \text{ حاو}^2 + \frac{1}{8} \text{ حاو}^3 + \dots + \frac{1}{2^n} \text{ حاو}^n + \dots$$

$$(2) \quad \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots (2n)} + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots (2n)} + \dots \right]$$

وليس هنالك ثابت اختياري لان هذا التكامل يجب ان يتبدى بالصفر

بمسد اذا اراد إيجاد ربع القطع الناقص لزم جعل $\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ في جميع التكاملات وبإجراء هذا الوضع في قانون (٢) يحدث

$$\frac{1}{r} \text{ حارو } = \frac{1}{r} \cdot \frac{(1-r)(2-r) \dots \infty \times 2 \times 1}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 \times 21 \times 23 \times 25 \times 27 \times 29 \times 31 \times 33 \times 35 \times 37 \times 39 \times 41 \times 43 \times 45 \times 47 \times 49 \times 51 \times 53 \times 55 \times 57 \times 59 \times 61 \times 63 \times 65 \times 67 \times 69 \times 71 \times 73 \times 75 \times 77 \times 79 \times 81 \times 83 \times 85 \times 87 \times 89 \times 91 \times 93 \times 95 \times 97 \times 99}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{1}{r} \text{ حارو } = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} + \frac{1}{37} - \frac{1}{39} + \frac{1}{41} - \frac{1}{43} + \frac{1}{45} - \frac{1}{47} + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} + \frac{1}{57} - \frac{1}{59} + \frac{1}{61} - \frac{1}{63} + \frac{1}{65} - \frac{1}{67} + \frac{1}{69} - \frac{1}{71} + \frac{1}{73} - \frac{1}{75} + \frac{1}{77} - \frac{1}{79} + \frac{1}{81} - \frac{1}{83} + \frac{1}{85} - \frac{1}{87} + \frac{1}{89} - \frac{1}{91} + \frac{1}{93} - \frac{1}{95} + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right)$$

وإذاً يكون

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} - \frac{1}{35} + \frac{1}{37} - \frac{1}{39} + \frac{1}{41} - \frac{1}{43} + \frac{1}{45} - \frac{1}{47} + \frac{1}{49} - \frac{1}{51} + \frac{1}{53} - \frac{1}{55} + \frac{1}{57} - \frac{1}{59} + \frac{1}{61} - \frac{1}{63} + \frac{1}{65} - \frac{1}{67} + \frac{1}{69} - \frac{1}{71} + \frac{1}{73} - \frac{1}{75} + \frac{1}{77} - \frac{1}{79} + \frac{1}{81} - \frac{1}{83} + \frac{1}{85} - \frac{1}{87} + \frac{1}{89} - \frac{1}{91} + \frac{1}{93} - \frac{1}{95} + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = \frac{1}{r}$$

وهذه المتسلسلة تقاربية ويكون تقاربها أكثر كلما كان r صغيراً وقل الفرق بين r و 1 ومتى بعد القطع الناقص قليلاً عن الدائرة المرسومة على المحور الأكبر كفي حساب حدود قليلة العدد من المتسلسلة لتحصيل المقدار بتقريب كاف

في حساب طول قوس من قطع زاوية

بمسد اذا اعتبر القطع الزائده المبين بالمعادلة

$$r^2 \cos^2 \theta = 1 - r^2 \sin^2 \theta$$

يكون

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - r^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{1 - r^2 \sin^2 \theta} + 1$$

ولاجل الاختصار نضع

$$r^2 = 1 - r^2 \sin^2 \theta$$

(وحرف r رمز النسبة بين البعد البؤري والمحور القاطع) فيكون

$$\frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - r^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{1 - r^2 \sin^2 \theta} + 1$$

وحيثان سه يتغيرين ح والى ما لانهاية فنضع

$$\frac{\text{ح}}{\text{حناو}} = \text{سه}$$

(وحرف و يتغير من . الى ط) فيكون

$$\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} = \text{كسه}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} = \text{صه} \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - 1 \right] \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - 1 \right] = \text{ح حناو}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} = \text{قوس ام} = \text{بها ح حناو}$$

ولاجل تحصيل هذا التكامل يحل الجذر $\left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - 1 \right]$ بواسطة قانون ذات الحدين فيحدث

$$\left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - \frac{1}{4} \right] + \dots$$

ومن هنا يكون

$$\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} = \text{ح حناو} - \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} - \frac{1}{4} \right] - \dots$$

وليق الا حساب تكاملات بالصورة حناو حناو فيها م عدد زوجي ويتحصل عليها بالقانون
المعلوم

في حساب طول السيكلويد

بنقد اذا أخذت الاحداثيات كما في الفصل المتقدم يكون

$$\frac{\text{ح حناو}}{\text{حناو}} = \text{كسه}$$

م ع ح و ل م ح ح و حينئذ اذا كان صه متزايدا ورمزنا بحرف صه للرأى
م ح يحدث

$$\text{ط صه ف سه} < \text{ف ع} < \text{ط صه ف سه}$$

أو

$$\text{ط صه} < \frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} < \text{ط صه}$$

وتتغير جهة هاتين المتباينتين اذا كان صه متناقصا وفي كل حال تكون النسبة $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}}$ محصورة
بين كيتين تقربان احدهما من الاخرى كلما نقص ف سه وعند النهاية يكون

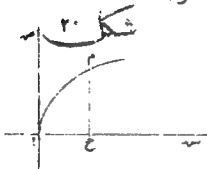
$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} = \text{ط صه}$$

ومن هنا يكون

$$\text{ع} = \text{ط صه} \text{ ف سه}$$

ومن هنا يعلم انه يلزم استخراج مقدار صه من معادلة المتخني بدلالة سه وأخذ انتكامل بين
النهايتين المطابقتين لنهايتي القوس الراسم

في تكعيب مجسم القطع الناقص المتحرك



بئذ ليكن ع الجسم الحادث من دوران جزء أ م ع
من قطع ناقص دائر حول محوره الاصغر فعدالة القطع
الناقص منسوب بالمحور الأكبر والمماس من رأسه هي

$$\text{صه} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} (٢ ح سه - سه^٢)$$

وحيث يكون

$$\text{ع} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} \text{ بئذا } (٢ ح سه - سه^٢) = \text{ط صه} (٢ ح سه - سه^٢) \quad (١)$$

واذا جعل سه = ٢ تحصل مساحة جسم القطع الناقص بتمامه وهي

$$\text{ع} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} (٢ ح سه - سه^٢) = \frac{\text{ف ع}}{\text{ف سه}} \cdot \frac{٤}{٣} \quad (٢)$$

ولتحصيل مساحة الجسم الحادث من دوران نصف القطع الناقص حول محوره الاصغر يلزم ابدال
حرف ب بحرف ح وحرف ح بحرف ب فيحصل $\frac{٤}{٣} \text{ ط ح ب}$ ويشاهد ان هذه
المساحة أكبر من المساحة الاولى

ويجعل $n = 2$ في هذه القوانين يوجد $\frac{4}{3} \pi r^3$ وهي مساحة جسم الكرة ويكون
 $\frac{4}{3} \pi r^3 = 2 \pi r^2 \times \frac{r}{3}$ مقدار مساحة القطعة الكروية ذات القاعدة الواحدة

في مساحة الجسم الحادث من دوران سيكلويد

٩٣- لجعل المحورين الاحداثيين هما المماس من الرأس والعمودي في هذه النقطة ونفرض ان α مساحة الجسم الحادث من دوران α م حول المحور
اسم حيث كانت المعادلة التفاضلية للبيكويد هي

$$\sqrt[2]{\frac{6}{3}} = \sqrt[2]{\frac{2}{1}} = \sqrt{2} = 1.41421356237$$

فكون

[illegible]

$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ بجا 6 ص ١٢ ص - ص - ط بجا (ج-ص) 6 ص ١٢ ص - ص

والتكامل الاول هو مساحة سطح الجزء الذي ولتحصيل التكامل الثاني نجعل

۲ ص - ص = ع فيكون ۲ (ص - ص) ۶ ص = ع

$$\frac{r}{r}e = e6^{\frac{1}{r}}e d \cdot \frac{1}{r} = \frac{e6}{r}e^{-\sqrt{d}} = \overline{e6 - \sqrt{d}}$$

واذن يكون

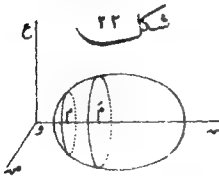
$$\frac{r}{r'}(p_1 - p_2) = \frac{p_1}{p_2} - \frac{r}{r'}$$

ويتحصل على مساحة الجسم الحادث من دوران الم حول Δ بحساب الفرق بين مساحة الجسم الحادث من دوران المستطيل AMC والجزء AMC

في الاجسام التي يمكن تحصيل مساحتها بعملية تكامل واحدة

بئذ يمكن أيضا بعملية تكامل واحدة تحصيل مساحة الجسم متى كانت مساحة القطاع الحادث من قطع هذا الجسم مستو مواز للمستوى ص و د دالة البعدين هذين المستويين

فلنفرض في أول الامر ان المحاور عمودية وان $ق$ و $ق + ف$ مساحتا القطاعين الحاديين



من قطع الجسم بمستويين $م$ و $م$ موازيين للمستوى
صه و ع وبعدهما عن هذا الاخير هما $س$
و $س + ف$ $س$ بالتناظر فتكون زيادة الجسم $ف$ $ح$
المطابقة للزيادة $ف$ $س$ للافتق محصورة بين الاسطوانتين
القائمتين اللتين قاعدتهما بالتناظر هما $ق$ و $ق + ف$
وارتفاعهما $س$ أعني انه يكون

$$(ق + ف) س = ف ح < ق ح$$

(وذلك يفرض $ق$ موجبا) واذن يكون

$$ق + ف < \frac{ق ح}{س}$$

وعند النهاية ينعدم $ق$ ويكون

$$\frac{ق}{س} = ح \text{ او } ق = ح س$$

وحينئذ تتحصل مساحة الجسم المحصور بين مستويين موازيين للمستوى صه و ع ومتباعدين
عنه بالمعدين $ا$ و $ب$ بواسطة القانون

$$ع = \frac{ب ا}{س}$$

ولتحصيل مساحة الجسم بقامه يلزم مدمستويين مماسين موازيين للمستوى صه و ع وجعل
نهايتي التكامل هما بعداهذين المستويين عن المستوى صه و ع

يهد ولنفرض الآن ان المحور $س$ مائل على مستوى القطاعين فيمقارنة الجسم المحصور
بين مستويين موازيين للمستوى صه و ع والسطح باسطوانة مائلة قاعدتها $ق$ وارتفاعها
البعد $ق$ $س$ $ح$ بين المستويين (وحرف $س$ رمز للزاوية الواقعة بين المستوى $س$ $صه$
والمحور $س$) يكون

$$ع = ق س ح$$

ويكون

$$ع = ح س$$

بهد مثلا لنفرض محور طاذق قاعدة حيثما اتفق ونجعل محورا السينات هو العمود و $ح$ النازل

الفصل الرابع

في التكاملات المضاعفة وحسابها - أتم السطوح المنحنية

في التكاملات المضاعفة

يبدأ إذا فرضت دالة مثل E للمتغيرين x و y اللذين فإنهما دالة للاول وضربت في $dx dy$ وأخذ التكامل بين نهايتين معينتين مثل (x_1, y_1) و (x_2, y_2) أعني أجريت العملية $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} E dx dy$ باعتبار x ثابتا ثم اعتبرت الدالة التفاضلية $dx dy$ و E و أخذت تكاملها بالنسبة للمتغير y بين النهايتين a و b سمى الناتج $\int_a^b \int_{x_1}^{x_2} E dx dy$ و E تكاملا مزدوجا

ويكون التكامل المزدوج محدودا إذا عرفت نهايات التكاملين ويكون غير محدود في الحالة العكسية وإذا دللنا على هذا

$$\int_a^b \int_{x_1}^{x_2} E dx dy$$

يبدأ كل تكامل مزدوج مثل $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} E dx dy$ هو نهاية مجموع جميع حواصل الضرب التي صورتها E ف $dx dy$ بين نهايات عمليتي التكامل

لأن $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} E dx dy$ هو التكامل المحدود للدالة التفاضلية $E dx dy$ مأخوذا بين النهايتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) للدالة E وفيه $dx dy$ معتبرا ثابتا وإذا كان يكون

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} E dx dy = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} E dx dy$$

وحينئذ إذا ضرب في F و غير x من a إلى b يكون

$$\int_a^b \int_{x_1}^{x_2} E dx dy = \int_a^b \left[\int_{x_1}^{x_2} E dx \right] dy$$

ويكون

$$\int_a^b \int_{x_1}^{x_2} E dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \int_a^b E dy dx$$

وحيث كان s معتبرا ثابتا في كمية x (ع ف صه) فيكون

$$[s] = [f s] = [f] s \quad \text{أو} \quad [f s] = [f] s$$

$$[f s] = [f] s \quad \text{وحيث يكون}$$

$$[f s] = [f] s \quad \text{أو} \quad [f s] = [f] s$$

في التكامل الثلاثي

بمثلث لتكن $z = x + iy$ دالة ذات ثلاثة متغيرات غير متعلقة وهي s و v و w فإذا أخذ تكامل التفاضل dz بالنسبة لمتغير z أعني باعتبار s و v ثابتين وغير z بين نهايتين معينتين بدالتين لمتغيري s و v نفرضهما $z(s, v)$ و $z(s, v)$ يوجد التكامل

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

الذي يكون دالة للمتغيرين s و v

ولنعبر الآن s ثابتا في الدالة

$$z(s, v) = \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

ونأخذ تكامل هذه الدالة بالنسبة لمتغير v بين نهايتين لهذا المتغير نفرضهما $z(s, v)$ و $z(s, v)$ فيوجد التكامل

$$z(s, v) = \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

الذي يكون دالة لمتغير s

ثم إذا أخذ تكامل التفاضل

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

بالنسبة لمتغير s بين نهايتين a و b لهذا المتغير يكون الناتج هو

$$\begin{matrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \end{matrix}$$

وهذا ما يسمى تكاملا ثلاثيا وبين أيضا هكذا

$$\text{ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب}$$

وبمثل ذلك يمكن تصور التكامل الذي برتبة حيثما اتفق

واعلم انه في حالة التكامل الثلاثي يكون أيضا

$$\begin{matrix} \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \\ \text{٦} & \text{٦} & \text{٦} \end{matrix} = \text{ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب} \text{ ب}$$

ولما كان الاثبات مشابهة بالكلية للاثبات الذي أوردناه في التكامل المزدوج قد استصوبنا عدم ذكره هنا دفعا للتكرار

في مساحات السطوح التحركية

ببساطة مساحة السطح التحركي تحصل بواسطة عملية تكامل واحدة

فليكن ح م د منحنيًا مستويًا يولد بدورانه حول المحور

وسه الموجود في مستوى السطح المراد إيجاد مساحته

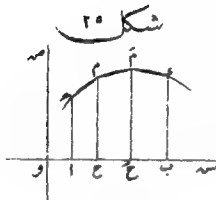
وليكن ح م د مضلعًا مرسومًا داخل هذا المنحنى

فيمكن اعتبار مساحة السطح نهاية مجموع سطوح مخاريط

ناقصة متوالة من دوران المضلع المذكور حينما يزيد عدد

أضلاعه الى ما لا نهاية

إذا تقرر هذا فلتكن



$$\text{م} (\text{س} + \text{ص}) \text{ و } \text{م} (\text{س} + \text{ف} + \text{ص} + \text{ف} + \text{ص})$$

رأسين متجاورين من رؤس المضلع فيكون مقدار السطح المرسوم بدوران م م هو

$$\frac{1}{2} \text{م م} (\text{م ح} + \text{م ح} + \text{م ح})$$

أو

$$\text{م} (\text{س} + \text{ص}) + \text{م} (\text{س} + \text{ف} + \text{ص}) + \text{م} (\text{س} + \text{ف} + \text{ص})$$

وحيث أن

$$\left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right) \left(1 + \frac{F_3}{F_2}\right) = \left(1 + \frac{F_3}{F_1}\right)$$
 ها (2) صه + ف صه)

$$2\text{ طصه} \left[1 + \left(\frac{\text{طصه}}{\text{طصه}} \right) + 1 \right] \text{ فسه}$$

وحرف ل رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم فسه واذن يكون مقدار السطح المرسوم بالمضلع هو

$$\text{مجموعه} \left[1 + \left(\frac{\text{ماده}}{\text{فایده}} \right) + \dots \right] \text{ فایده}$$

وبالرمز بحرف ك لمقدار السطح المطلوب يكون

$$L = \text{مهاج} + \left(\frac{\text{مهاج}}{\text{فارس}} + 1 \right) \times \text{مهاج} + \text{مهاج} (\text{الفارس})$$

وحيث أن $h = (l f)^{-1}$. وكذا

$$\left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2}} + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{2}} = \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{\frac{1}{2} \sqrt{2}} + 1 \right) \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{2}} \quad \text{فكون}$$

$$\sqrt{\frac{2}{2} + 1} \cdot \sqrt{2} = 2$$

و ا و ب هما اقصا نهاية القوس د د

فأذا رمى بحرف ، اقوس محسوب بالابتداء من نقطة ثابتة يكون

$$\frac{\frac{r_6}{r_6} + 1}{\frac{r_6}{r_6}} = r_6 = r_6$$

واذن يكون

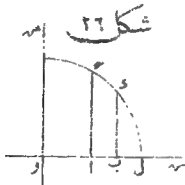
$$v_6 \sim \frac{1}{2} b_7 = 2$$

في مساحة المنطقة الكروية

بتأيد ولنطبق القانون المتقدم للبحث عن مساحة المنطقة المتولدة من دوران قوس الدائرة حول القطر ول نفرض ان

$$س٢ = ص٢ + ب٢$$

معادلة الدائرة ونفرض ان ك مساحة المنطقة وان
و ا = ١ و ب = ب فيكون



$$ك = ٢ \pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$ك = ٢ \pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

واذا يكون

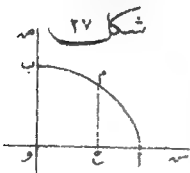
$$ك = \pi (1 - 0) = \pi$$

وهو ناتج معلوم

فان اريد ايجاد مساحة سطح الكرة بقسمة ك على ٢ فيكون الناتج هو مساحة سطح الكرة. وبذلك يوجد المقدار المعلوم وهو ك = ٢

في مساحة سطح مجسم القطع الناقص الدوراني

بتأيد ولنفرض الآن أن المنحنى الراسم هو و ا ب الذي هو نصف قطع ناقص ونفرض أنه يدور حول أحد محوريه وليكن و ا ونبحث أولاً عن مساحة السطح المتولد من دوران القوس ب م الذي مبدؤه النهاية ب للمحور الآخر فيكون



$$ك = ٢ \pi \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

وحيث كانت معادلة القطع الناقص هي

$$ا٢ = س٢ + ب٢$$

فيكون

$$\frac{ب٢}{ا٢} = \frac{ب٢}{ا٢}$$

وانذ يكون

$$\sqrt{\frac{6\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2 + 2\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}} = \sqrt{1 + \frac{6\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}}$$

وبعبوض $\text{أ}^2\text{ص}$ في هذا المقدار بما يوازيه $\text{أ}^2\text{ص} - \text{ب}^2\text{ص}$ يحدث

$$\sqrt{\frac{6\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2 - 2\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}} = \sqrt{1 + \frac{6\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}}$$

ولنفرض أولاً ان $\text{أ} < \text{ب}$ أعني ان القطع الناقص دائر حول محوره الاكبر ونضع

$$\text{أ} - \text{ب} = \text{أ}^2\text{ص}$$

$$\sqrt{\frac{6\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2 - 2\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}} = \sqrt{\frac{6\text{ص}^2 + 4\text{ص}^2 - 2\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}} = \sqrt{1 + \frac{6\text{ص}^2}{4\text{ص}^2}}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ب}^2\text{ص} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}}$$

لكن

$$\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}}$$

فاذا يكون

$$\left(\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} \right) = \left(\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} \right) = \left(\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} \right) = \left(\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} \right) = \left(\frac{\text{ب}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} \right)$$

بما ان اذا فرض ان $\text{أ} = \text{ب}$ في هذا القانون وضرب الناتج في أ يوجد المقدار

$$\text{أ}^2\text{ص} + \frac{\text{أ}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = \text{أ}^2\text{ص} + \frac{\text{أ}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}}$$

وهو المساحة الكلية لسطح مجسم القطع الناقص بتمامه

فاذا فرض ان $\text{أ} = \text{ب}$. يؤل مجسم القطع الناقص الى كرة وبملاحظة ان $\frac{\text{أ}^2\text{ص}}{\text{أ}^2\text{ص}} = 1$

حينئذ يكون $\text{أ} = \text{ب}$. يوجد المقدار $\text{أ}^2\text{ص}$ وهو مساحة الكرة

(١٢) تكمل - ثانی

بمسألة ولنفرض الآن أن $a > b$ وأن $\sqrt{a^2 - b^2} = c$ و فيكون

$$\begin{aligned} \text{لـ} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} \\ = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned}$$

لكن

$$\text{لـ} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2}$$

فإذا يكون

$$\text{لـ} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2}$$

وحيث أنه يجب أن ينعدم هذا التكامل بالمقدار $c = 0$ فيكون

$$\text{ث} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}$$

وإذا يكون

$$\text{لـ} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2} = \frac{c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + \frac{1}{2}$$

فإذا فرض أن $c = 0$ وضرب في c يوجد المقدار

$$c \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$$

وهو مقدار مساحة سطح مجسم القطع الناقص بقلمه

بمسألة إذا فرض أن $c = 0$ يشاهد جعل الكمية

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + 1 \right)$$

بواسطة قانون ذات المدين أن

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c \sqrt{a^2 - b^2}}{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}} + 1 \right)$$

وبذلك يوجد أن مساحة الكرة تساوي $4\pi a^2$

هذا اخر ما أردنا ايراده في هذا الكتاب من حساب التفاضل والتكامل لأولى الالباب
والمجد لله على كل حال والصلاة والسلام على سيدنا محمد وأصحابه والآل ملاح بدر تمام
وفاح مسك ختام آمين

وكان تمام طبعه وحسن وضعه بالمطبعة الكبرى العامرة بيولا في مصر القاهرة معجبا
بمعرفة حضرة مؤلفه ذي الكمال والانتقان أدام الله معارفه منهل أعذب لذوى العرفان في ظل
الحضرة النخيسة الخديوية والطلعة المباركة التوفيقية حفظ الله أنجاله الصكرام
ورجال حكومته الفخام وذلك في شهر شعبان المعظم من عام ١٣٠٧
من هجرة النبي صلى الله عليه وسلم

Biblioteca Alexandrina



0418107